جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques
Filière : SMPC
Session Ordinaire : 15-06-19

Examen d'Analyse II (1h30)

Exercice 1. (7 Pts$= 2+2+3$)

a. En utilisant la décomposition en éléments simples, montrer que

$$(\forall x > 1) : \qquad \int \frac{-2}{x^3 - x}\, dx = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + cte.$$

b. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{e^{2t}-1}\, dt = \ln\left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)$.

c. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation linéaire : $\quad (E) \quad x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

Exercice 2. (9 Pts$= 2+2+3+2$)

a. Donner la forme d'une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

b. Étudier la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(1 + e^{-n}).$$

c. Étudier la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

d. Donner le domaine de définition de la fonction $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Exercice 3. (4 Pts $= 2+1+1$)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = x^n(2-x).$$

a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

c. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\, dx$.

N.B :
— Dans l'exercices 2, les questions sont indépendantes.
— Les calculettes et les documents sont interdits.

Bon Courage

Corrigé d'Examen d'Analyse II

Exercice 4. (7 Pts$= 2 + 2 + 3$)

a. On a $F(x) := \dfrac{-2}{x^3 - x} = \dfrac{-2}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, avec :

$a = x.F(x)\Big|_{x=0} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}\Big|_{x=0} = 2,$

$b = (x-1).F(x)\Big|_{x=1} = \dfrac{-2}{x(x+1)}\Big|_{x=1} = -1,$

$c = (x+1).F(x)\Big|_{x=-1} = \dfrac{-2}{x(x-1)}\Big|_{x=-1} = -1,$

d'où, $F(x) := \dfrac{-2}{x^3 - x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$. Donc,

$$\int \frac{1}{x^3 - x}\, dx = 2\ln(x) - \ln(x-1) - \ln(x+1) + cte = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + cte.$$

b. On pose $x = e^t$, d'où $dx = e^t\ dt = x\ dt$, c-à-d $dt = \dfrac{dx}{x}$, donc

$$\int_1^2 \frac{-2}{e^{2t}-1}\, dt = \int_e^{e^2} \frac{-2}{x^3 - x}\, dx = \left[\ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{e^2}{e^2+1}\right).$$

c. On commence par résoudre l'équation homogène $x(x^2-1)y' + 2y = 0$. On a

$$\begin{aligned} x(x^2-1)y' + 2y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-2dx}{x^3 - x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-2dx}{x^3 - x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + \text{cte} \\ &\Rightarrow y = \frac{C.x^2}{x^2-1}, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E) ; sous la forme $y_p = C(x).\dfrac{x^2}{x^2-1}$; par la méthode de variation de la constante :

$$
\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E) &\Rightarrow x(x^2-1)y_p' + 2y_p = x^2 \\
&\Rightarrow x^3C'(x) - C(x).\frac{x^2}{x^2-1} + C(x).\frac{x^2}{x^2-1} = x^2 \\
&\Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{x}\, dx \\
&\Rightarrow C(x) = \ln(x) \\
&\Rightarrow y_p = C(x).\frac{x^2}{x^2-1} = \ln(x).\frac{x^2}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = C.\frac{x^2}{x^2-1}+\ln(x).\frac{x^2}{x^2-1} = \Big(C+\ln(x)\Big)\frac{x^2}{x^2-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. (7 Pts$= 2+2+3+2$)

a. L'équation caractéristique (EC) : $r^2-2r+1=0$ admet une racine double $r=1$. Et $xe^x = e^{mx}\Big(P_1(x)\cos(\omega x)+Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m=1$, $\omega=0$, $P_1(x)=x$ et $Q_{-\infty}(x)=0$. Or $m+i\omega=1$ est racine double de (EC), alors, la solution particulière de (E) est de la forme :

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= x^2e^{mx}\Big(R_1(x)\cos(\omega x)+T_1(x)\sin(\omega x)\Big) \\
&= x^2e^{x}\Big((ax+b)\cos(0.x)+(\alpha x+\beta)\sin(0.x)\Big) \\
&= x^2(ax+b)e^x.
\end{aligned}
$$

b. ♣ On a $n^2u_n = n^2\big(\frac{1}{2}\big)^{\sqrt{n}} = e^{2\ln n}e^{-\sqrt{n}\ln 2} = e^{\sqrt{n}\left(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}-\ln 2\right)}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0 \neq \infty$, parconséquent, d'après les règles de Riemann, la série $\sum u_n$ converge.
♣ On a $\ln(1+e^{-n}) \sim_{+\infty} e^{-n}$ et $\sum e^{-n}$ est une série géométrique ($q=\frac{1}{e}<1$) convergente (on peut utiliser le critère de Cauchy, critère de D'Alembert, les règles de Riemenn...), donc, d'après le critère de comparaison, la série $\sum \ln(1+e^{-n})$ converge.

c. ♣ La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]1;+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 1 et en $+\infty$.

◇ On a $\lim_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}.\dfrac{1}{t+1} = 1.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ = finie, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^c \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ est convergente ($c>1$).

◇ On a $\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}\,dt$ est une intégrale de Bertrand convergente car ($\alpha=2>1, \beta$qlq), donc, d'après le critère de comparaison $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge.

Ou bien, on a : $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}.\dfrac{\ln(t)}{t^2-1} = 0 \neq \infty$. Donc, $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge (d'après les règles de Riemann $\alpha=\frac{3}{2}>1$).

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \int_1^{c}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt + \int_c^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = cv + cv = cv.$

♣ La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, il y a donc un problème en $+\infty$. On a $\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$, donc, d'après les règles de Riemann ($\alpha=2>1$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

d. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\left|\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $D_\psi=\mathbb{R}$.

Ou bien, on a : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\lim_{n\to+\infty} n^2.\dfrac{\arctan(nx)}{n^2} = \dfrac{\pi}{2} \neq \infty$. Par conséquent, d'après les règles de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. D'où, $D_\psi=\mathbb{R}$.

Exercice 6. (4 Pts = 2 + 1 + 1)

a. soit $x\in[0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{pour } x\in[0,1[,\\ 1 & \text{pour } x=1.\end{cases}$

D'où, pour $x=1$ on a $f_n(1)=1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et pour $0\leq x<1$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x\in[0,1[\\ 1, & \text{pour } x=1.\end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction f est discontinue, donc, la convergence n'est pas uniforme.

b. soit $x \in [0,a]$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |x^n(2-x) - 0| = x^n(2-x) \leq 2a^n$,d'où $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2a^n$. Or, $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ (car $0 \leq a < 1$), donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

C-à-d, la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $g = 0$.

Ou bien, $\Big(|f_n(x) - f(x)|\Big)' = \Big(x^n(2-x)\Big)' = x^{n-1}\Big(2n - (n+1)x\Big) \geq 0$, donc, $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n(2-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Les fonctions f_n sont intégrables (continues) sur $[0, \frac{1}{2}]$ et la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction $g = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\ dt = 0.$$