Université Moulay Ismail

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Support du cours et exercices de Mathématiques Filière: SMC Semestre III

Réalisé par: J. H'michane

Année Universitaire 2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

I. Résumé du cours

1.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a divise b s'il existe un entier k tel que $b = a \times k$.
Lorsque a divise b, on note $a \mid b$

On dit aussi que : a est un **diviseur** de b
b est **divisible** par a
b est un **multiple** de a

Remarque 1. *a) 0 est un multiple de tout entier :* $(\forall n \in \mathbb{Z}), 0 \times n = 0$

b) $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a \mid a, a \mid 0$ *et* $1 \mid a$.

c) $(\forall a \in \mathbb{Z}) : 0 \mid a \Rightarrow a = 0$ *et* $a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Propriétés

Soit a, b et c trois entiers.

a) Si $a \mid b$ et $b \neq 0$ alors $|a| \leqslant |b|$

b) Tout entier b **non nul** a un nombre fini de diviseurs.

c) Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$

d) $c \mid a$ si et seulement si $c \mid -a$

(L'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$)

e)Si $c \mid a$ alors $c \mid ab$

f) Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors : 1) $c \mid a+b$

2) $c \mid a-b$

3) $c \mid au+bv$ avec u et v entiers

g) Soit a et b non nuls. Si $b \mid a$ et $a \mid b$ alors $a=b$ ou $a=-b$

Démonstration. a) Comme $a \mid b$, on peut écrire $b=k\times a$ avec $k\in\mathbb{Z}$ donc :

$|b|=|k\times a|=|k|\times|a|$ mais $b\neq 0$ donc $k\neq 0$ et $|k|\geq 1$ et par conséquent :$|a|\leq|b|$

b) Soit b un entier non nul. Si a est un diviseur de b on a vu que : $|a|\leq|b|$ donc $-|b|\leq a\leq|b|$ et a peut prendre au maximum $2\times|b|$ valeurs.

En revanche, 0 a une infinité de diviseurs car tous les entiers divisent 0.

d) Si $c \mid a$, il existe un entier k tel que : $a=k\times c$ et donc $-a=(-k)\times c$ soit $c\mid -a$

Si $c\mid -a$, il existe un entier k' tel que : $-a=k'\times c$ et donc $a=(-k')\times c$ soit $c\mid a$ □

Notations 1. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note :*

** $D(n)=\{q\in\mathbb{Z}$ tel que q divise $n\}$ l'ensemble de tous les diviseurs de n.*

** $n\mathbb{Z}=\{n.q,$ tel que $q\in\mathbb{Z}\}$ l'ensemble de tous les multiples de n.*

Remarque 2. *On a la correspondace :*

$$b\mid a \Leftrightarrow a\mathbb{Z}\subset b\mathbb{Z}\Leftrightarrow D(b)\subset D(a).$$

Exercice 1. *1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $n-1\mid n^4-1$.*

2) Soient x,y des entiers. Montrer que $3x+6y$ est divisible par 11 si et seulement si $8x+5y$ l'est.

Théorème : Division Euclidienne

Soit a et b deux entiers avec $b\neq 0$.

Il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a=bq+r \text{ avec } 0\leq r<|b|$$

Démonstration. ♣ L'existence :

* On suppose que $b>0$ et on pose $A=\{k\in\mathbb{Z}$ tel que $bk\leq a\}$. Cet ensemble et non vide (pour $a\geq 0$, on a $0\in A$ et pour $a<0$, on a $a\in A$) et majoré (pour $a\geq 0$, A est majoré par a et pour $a<0$, A est majoré par 0). Or dans $\mathbb{Z}$, tout ensemble non vide et majoré admet un plus grand élement, donc l'ensemble A admet un plus grand élement q qui vérifie : $bq\leq a<b\,(q+1)$.

Pour l'existence de r, il suffit de prendre $r=a-bq$.

* Pour $b<0$, on travaille avec $-b>0$; D'après ce qui précède; on a l'existence de $(q',r')\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant $a=-bq'+r'$ avec $0\leq r'<-b$. il suffit donc de prendre $q=-q'$ et $r=r'$.

♣ L'unicité : supposons qu'il existe deux couples (q,r) et (q',r') vérifiant :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b| \quad \text{et} \quad a = bq' + r', \quad 0 \leq r' < |b| \quad \text{avec} q \neq q'$$

on a donc $|r - r'| = |b(q - q')| \geq |b|$ (car $q \neq q'$), ce qui est impossible car r et r' sont dans $[0; |b|[$. D'où $q = q'$ et $r = r'$. □

Notations 2. *a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste*

Exemples 1. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b avec :*

a) $a = 325, b = 7$

b) $a = -113, b = 7$

c) $a = 234, b = -7$

d) $a = -234, b = -7$

1.2 Plus grand commun diviseur

Définition

Soit a et b deux entiers. On note $D(a; b)$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

Propriétés

1) Si a, b, q et r sont des entiers tels que : $a = bq + r$ alors $D(a; b) = D(b; r)$

2) Si $b \mid a$ alors $D(a; b)$ est égal à l'ensemble des diviseurs de b, qu'on a noté $D(b)$.

Démonstration. 1) Si $d \in D(a; b)$ alors $d \mid r$ car $r = a - bq$ donc $d \in D(b; r)$

Si $d \in D(b; r)$ alors $d \mid a$ car $a = bq + r$ donc $d \in D(a; b)$

2) Si $d \in D(b)$ alors $d \mid b$, or $b \mid a$ donc $d \mid a$ c-à-d $d \in D(a)$ d'où $d \in D(a; b)$ donc $D(b) \subset D(a; b)$. D'autre part, on a $D(a; b) \subset D(b)$. □

Définition

Si a et b sont deux entiers non tous les deux nuls. L'ensemble $D(a; b)$ n'est pas vide (il contient 1) et est majoré par $\max(|a|; |b|)$. Il admet donc un plus grand élément appelé **plus grand commun diviseur** de a et b.On le note $a \wedge b$ ou $\text{pgcd}(a; b)$.

Remarques 3. *1) Le nombre $a \wedge b$ est unique.*

2)$0 \wedge 0$ *n'est pas défini.*

3) $\forall a \in \mathbb{Z}^* : 0 \wedge a = |a|$ *car* $a \mid 0$.

Propriétés du PGCD

Soit a, b, d et r des entiers non nuls.

1) $a \wedge b \geq 1$

2) $a \wedge b = b \wedge a$

3) $a \wedge a = |a|$ et $a \wedge 1 = 1$

4) $a \wedge b = (-a) \wedge b = a \wedge (-b)$

5) Si $b \mid a$ alors $a \wedge b = |b|$

6) Si $a = bq + r$ alors, $a \wedge b = b \wedge r$

7) Si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid a \wedge b$

8) Si $d = a \wedge b$, alors $D(a;b) = D(d)$ (d'après l'algorithme d'Euclide).

9)$(da) \wedge (db) = d \times (a \wedge b)$

Principe de l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que b ne divise pas a. Alors pgcd$(a;b)$ est le **dernier reste non nul** de la suite des divisions de l'algorithme d'Euclide.

Si $r_1, r_2, ..., r_n$ est la suite de restes non nuls, on a :

$D\left(a;b\right) = D\left(b;r_1\right) = ...D\left(r_{n-1};r_n\right) = D\left(r_n\right)$

Application 1. *Calculer* $8820 \wedge 3150$

Théorème : Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers non nuls.

Si $d = pgcd(a;b)$, Il existe des entiers u et v tels que : $d = au + bv$

Démonstration. Soit $E = \{au + bv \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = 1, v = 0$, on voit que $a \in E$ Si $u = -1, v = 0$, on voit que $-a \in E$ Si $u = 0, v = 1$, on voit que $b \in E$

E contient au moins un entier strictement positif. Soit δ le plus petit d'entre eux ; il existe u_0 et v_0 entiers tels que : $\delta = au_0 + bv_0$

Soit $au + bv$ un élément quelconque de E La division euclidienne de cet élément par δ donne $au + bv = \delta q + r, 0 \leq r < \delta$ d'où : $r = au + bv - q\left(au_0 + bv_0\right) = a\left(u - qu_0\right) + b\left(v - qv_0\right)$

Par suite, $r \in E$ et $0 \leq r < \delta$, mais d'après la définition de δ : $r = 0$ donc **tout élément de E est multiple de** δ.

$\delta \mid a$ et $\delta \mid b$ donc $\delta \mid d = pgcd(a;b)$.

Réciproquement, $d \mid a$ et $d \mid b$ donc aussi $d \mid au_0 + bv_0$ c'est-à-dire, $d \mid \delta$. Conclusion : $d = \delta$ $\square$

Exercice 2. *On pose $a = 123$ et $b = 12$.*

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, Détérminer pgcd$(a; b)$.

2) En déduire deux entiers u et v tels que $au + bv =$pgcd$(a; b)$.

1.3 Entiers premiers entre eux

Définition

Soit a et b deux entiers non nuls. On dit que a et b sont **premiers entre eux** si $\text{pgcd}(a, b) = 1$

Théorème (*)

Soit a, b et d des entiers non nuls.

$\text{pgcd}(a, b) = d$ si et seulement si, il existe deux entiers non nuls α et β tels que : $a = \alpha d, b = \beta d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$

Démonstration. Si $d = \text{pgcd}(a, b), d \mid a, d \mid b$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ tels que : $a = \alpha d, b = \beta d$

Soit $r = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$ alors $\text{pgcd}(\alpha d, \beta d) = dr = d$ donc $dr = d$ avec $d \neq 0$ donc $r = 1$ et $\alpha \wedge \beta = 1$

Réciproquement, si $a = \alpha d, b = \beta d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$ alors $\text{pgcd}(\alpha d, \beta d) = d \times \text{pgcd}(\alpha, \beta) = d$ □

Théorème de Bézout

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe des entiers u et v tels que : $au + bv = 1$

Démonstration. Si a et b premiers entre eux, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et donc il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Réciproquement, si $au + bv = 1$ et $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid au + bv$ donc d divise 1. Les seuls diviseurs communs à a et b sont -1 et 1 et $a \wedge b = 1$ □

Exercice 3. *En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $(n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 4) = 1$.*

Proposition

Soit a, b et c des entiers non nuls.

1) Si $a \wedge b = 1$ et $c \mid b$ alors $a \wedge c = 1$

2) Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$

3) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} : a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1$

4) $\forall m \in \mathbb{Z}^* : a^m \wedge b^m = (a \wedge b)^m$

Démonstration. 1) On pose $a \wedge c = d$, donc $d \mid a$ et $d \mid c$. Or $c \mid b$, par transitivité $d \mid a$ et $d \mid b$ donc $d \mid a \wedge b$, c-à-d $d \mid 1$, d'où $d = 1$.

2)Si $a \wedge b = 1$ il existe u, v tels que $au + bv = 1$

Si $a \wedge c = 1$ il existe u', v' tels que $au' + cv' = 1$

donc : $(au + bv)(au' + cv') = 1 = a(auu' + cuv' + bu'v) + (bc)(vv')$ donc $a \wedge (bc) = 1$

3) Supposons $a \wedge b = 1$. D'après la propriété (1), on a $a \wedge b^n = 1$, puis $a^m \wedge b^n = 1$.

Réciprouquement, si $a^m \wedge b^n = 1$, d'après la propriété (1), on a $a \wedge b^n = 1$, puis $a \wedge b = 1$.

4) On pose $a \wedge b = d$, d'après le Théorème (*), il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$ tel que $a = \alpha d, b = \beta d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$, On a alors :

$$\begin{aligned} a^m \wedge b^m &= (\alpha^m d^m) \wedge (\beta^m d^m) \\ &= d^m(\alpha^m \wedge \beta^m) \\ &= d^m \\ &= (a \wedge b)^m. \end{aligned}$$

□

Théorème de Gauss

Soit a, b, c entiers avec a, b non nuls.

Si a divise bc et a premier avec b alors a divise c.

Démonstration. Comme $a \wedge b = 1$ il existe u, v tels que $au + bv = 1$ donc $cau + cbv = c$

a divise acu et bcv donc a divise c. □

Exercice 4. *1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E_1) : $\quad 7x = 4y$.*

2) a) Vérifie que $(2; 3)$ est solution particulière de l'équation : (E_2) : $\quad 7x - 4y = 2$.

b) En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ les solutions de l'équation (E_2).

Corollaire

Soit a, b et n des entiers non nuls.

$$a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1 \Rightarrow ab \mid n$$

Démonstration. Si $a \mid n$ il existe un entier k tel que $n = ak$.

Si $b \mid n$ alors $b \mid ak$ et comme $a \wedge b = 1$, d'après Gauss, $b \mid k$. Il existe donc k' tel que $k = bk'$ et on a alors $n = ak = abk'$ donc n est divisible par ab. □

Définition

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs positifs (1 et lui-même)

Remarque 4. *1 n'est pas premier.*

Théorème

Tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

Si n n'est pas premier et $n \geq 2$ alors il admet un diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Démonstration. Si n est premier, il admet bien un diviseur premier : lui-même.

Si n n'est pas premier alors il admet un plus petit diviseur positif $p \neq 1$. p est premier sinon p aurait lui-même un diviseur positif différent de 1 qui serait un diviseur de n, mais plus petit que p.

De plus, n peut s'écrire $n = p \times r$ avec $p \leq r$ donc $p^2 \leq p \times r$ soit $p^2 \leq n$ et $p \leq \sqrt{n}$. □

Remarque 5. *On utilise ce théorème de la manière suivante :*

Si un naturel $n \geq 2$ n'admet pas de diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Exemple 2. *Pour savoir si 631 est premier, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à* $\sqrt{631} \approx 25,12$

Théorème

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_n$

Soit $N = p_1 \times p_2 \times .... \times p_n + 1$

N n'est pas premier car pour tout i de 1 à n, $N > p_i$.

N admet donc un diviseur premier dans la liste $p_1, p_2, ..., p_n$.

Soit p_k ce diviseur premier de N.

p_k divise N et p_k divise $p_1 \times p_2 \times .... \times p_n$ donc

p_k divise $N - p_1 \times p_2 \times .... \times p_n$, soit p_k divise 1 : la seule possibilité est que $p_k = 1$ qui est impossible car p_k est premier. □

Théorème

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet une décomposition, unique à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.

Exemple 3. $72 = 2^3 \times 3^2$

1.4 Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit a et b deux entiers et n un entier naturel non nul.

On dit que a est **congru à** b **modulo** n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Notation 3. *a est congru à b modulo n se note au choix : $a \equiv b\,(n)$ ou $a \equiv b\,[n]$ ou $a \equiv b$ mod n*

Exemple 4. *86 et 23 ont pour reste 2 dans la division euclidienne par 7 donc* $86 \equiv 23\,[7]$

Proposition

Soit a, b, c et r entiers et n un entier naturel non nul.

1) $a \equiv a\,[n]$ et $a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow b \equiv a\,[n]$

2) Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$ alors $a \equiv c\,[n]$

3) $a \equiv b\,[n]$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n

Proposition

Soit a, b, c et r entiers et n un entier naturel non nul.

1) Si $a \equiv r\,[n]$ et si $0 \leq r < n$ alors r est le reste de la division de a par n.

2) Tout entier a est congru modulo n à un unique entier p tel que $0 \leq p \leq n-1$.

Démonstration. 1) * Si $a \equiv b\,[n]$ alors la division par n donne : $a = nq + r$ et $b = nq' + r$ donc $a - b = n(q - q')$: n divise $a - b$

* Si n divise $a - b$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = nk$ soit $a = b + nk$

La division de a par n se traduit par : $a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. On a alors $b + nk = nq + r$ donc $b = n(q - k) + r$ et $0 \leq r < n$ qui se traduit par : a et b ont le même reste dans la division par n

2) La division Euclidienne de a par n nous garantie l'existence d'un unique entier $p \in \{0; 1; ...; n-1\}$ tel que $a = nq + p$. le reste p vérifie donc $a \equiv p\,[n]$. □

Congruences et opérations

Soit a, b, c et d entiers et n un entier naturel non nul.

1) Si $a \equiv b\,[n]$ alors $ac \equiv bc\,[n]$.

2) Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors : 1) $a + c \equiv b + d\,[n]$
2) $a - c \equiv b - d\,[n]$
3) $ac \equiv bd\,[n]$

3) Si $a \equiv b\,[n]$ alors, pour tout naturel p, on a : $a^p \equiv b^p\,[n]$

Attention : La congruence n'est pas compatible avec la division, en effet :

$$16 \equiv 20\,[4] \quad \text{et} \quad 2 \equiv 2\,[4] \not\Rightarrow 8 \equiv 10\,[4]$$

Théorème

Soit a, x et y des entiers et n un entier naturel non nul. On a :

$$ax \equiv ay\,[n] \quad \text{et} \quad a \wedge n = 1 \Rightarrow x \equiv y\,[n]$$

Démonstration. Supposons que $ax \equiv ay\,[n]$ et $a \wedge n = 1$. On a :

$$ax \equiv ay\,[n] \Rightarrow n \mid ax - ay \Rightarrow n \mid a(x-y),$$

Or $a \wedge n = 1$, d'après le théorème de Gauss $n \mid x - y$ c-à-d $x \equiv y\,[n]$. □

Exercice 5. *1) Déterminer le reste dans la division Euclidienne de* 2015^{2015} *par* 11.

2) Déterminer les entiers x *vérifiant* $4x - 7 \equiv 1\,[3]$.

Théorème : Le petit théorème de Fermat

Soit p un entier naturel premier.

* Enoncé 1 : $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a^p \equiv a\,[p]$.

* Enoncé 2 : $(\forall a \in \mathbb{Z})$ tel que $a \wedge p = 1$ on a : $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Exercice 6. *Déterminer le reste dans la division Euclidienne de* 2015^{2015} *par* 11.

1.5 Écriture en base b

Considérons l'entier $n = 529$.

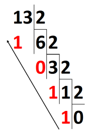
* On a :

$$\begin{aligned} 529 &= 500 + 20 + 9 \\ &= 5.10^2 + 2.10^1 + 9.10^0 \end{aligned}$$

L'entier n est donc représenté par des caractères dont les valeurs vont de 0 à 9 $(9 = 10 - 1)$ et les puissances de 10. On dit que 529 est **l'écriture décimale** de n ou bien 529 est **l'écriture de n en base** 10.

* On peut aussi écrire l'entier 529 en utilisant seulement les caractères $0; 1; 2$ et les puissances de 3, en effet :

$$\begin{aligned} 529 &= 486 + 23 \\ &= 2.3^5 + 43 \\ &= 2.3^5 + 27 + 16 \\ &= 2.3^5 + 1.3^3 + 9 + 7 \\ &= 2.3^5 + 1.3^3 + 1.3^2 + 2.3^1 + 1 \\ &= 2.3^5 + 0.3^4 + 1.3^3 + 1.3^2 + 2.3^1 + 1.3^1 \\ &= \overline{201121}_{(3)} \end{aligned}$$



Cette écriture est appelée : **écriture de** 529 **en base** 3.

Théorème

Soit n un entier naturel superieur ou égal à 2.

Tout entier $a > 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Où $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i \leq b-1$ et $a_n \neq 0$.

Dans cette écriture dite en base b, les a_i sont appelés chiffres de a en base b. On note $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}_{(b)}$.

Remarque 6. *Le principe général pour passer de la base* 10 *vers une base b consiste à faire les divisions Euclidienne par b jusqu'à ce que le quotient soit nul. La suite des restes inversée forme l'écriture dans la base b : Donc* $\overline{13 = 1101}_{(2)}$.

Exercice 7. *Donner l'écriture de l'entier* $\overline{10c07}_{(14)}$ *en base* 11.

1.6 Exercices avec solutions proposés

Exercice 1

1. Soient a, b, et d des entiers non nuls, tels que $d \setminus a + b$ et $d \setminus ab$. Montrer que $d \setminus a^2$ et que $d \setminus (a-b)^2$.
2. Soient a, b, c, et d des entiers tels que $p := ad + bc \neq 0$. On suppose que p divise a, b, c et d. Montrer que $p = \pm 1$.

<u>**Solution**</u> :

1. On a $d \setminus a + b \Longrightarrow d \setminus a(a+b) \Longrightarrow d \setminus a^2 + ab$.
   Or $d \setminus ab$, alors $d \setminus (a^2 + ab) - ab \Longrightarrow d \setminus a^2$. De même on montre que $d \setminus b^2$ et donc $d \setminus a^2 + b^2 - 2ab \Longrightarrow (a-b)^2$.
2. Soient a, b, c, et d des entiers tels que $p := ad + bc \neq 0$. On suppose que p divise a, b, c et d. Montrer que $p = \pm 1$.

■

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 14 \setminus 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 11 \setminus 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$.

Solution :

1. **Méthode 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $3^4 = 81 \Longrightarrow 3^4 \equiv 11[14] \Longrightarrow 3^{4n+2} \equiv 11^n \times 9[14]$;
   et on a $5^2 = 25 \Longrightarrow 5^2 \equiv 11[14] \Longrightarrow 5^{2n+1} \equiv 11^n \times 5[14]$;
   donc $3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv 11^n \times 9 + 11^n \times 5[14] \Longrightarrow 3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv 11^n \times (9+5)[14]$
   $\Longrightarrow 3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv 11^n \times 14[14] \Longrightarrow 3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv 0[14]$. Ainsi, $14 \setminus 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

   Méthode 2 : Montrons le résultat par récurrence.

   — Pour $n = 0$, on a $3^{4\times 0+2} + 5^{2\times 0+1} = 9 + 5 = 14 \Longrightarrow 14 \setminus 3^{4\times 0+2} + 5^{2\times 0+1}$.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $14 \setminus 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ et montrons que $14 \setminus 3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1}$.
   On a $3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 3^{4n+2} \times 3^4 + 5^{2n+1} \times 5^2 = 81 \times 3^{4n+2} + 25 \times 5^{2n+1}$
   $= 56 \times 3^{4n+2} + 25 \times 3^{4n+2} + 25 \times 5^{2n+1} = 4 \times 14 \times 3^{4n+2} + 25 \times (3^{4n+2} + 5^{2n+1})$
   $= 4 \times 14 \times 3^{4n+2} + 25 \times 14k = 14 \times (4 \times 3^{4n+2} + 25k) = 14k'$.

2. Montrer que : Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a $3^5 = 243 = 22 \times 11 + 1 \Longrightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Longrightarrow 3^{5n} \equiv 1[11]$;
   et on a $5^2 = 25 \Longrightarrow 5^2 \equiv 3[11] \Longrightarrow 5^4 \equiv 9[11] \Longrightarrow 5^5 \equiv 45[11] \Longrightarrow 5^5 \equiv 1[11]$
   $\Longrightarrow 5^{5n+1} \equiv 5[11]$;
   et on a $4^2 = 16 \Longrightarrow 4^2 \equiv 5[11] \Longrightarrow 4^4 \equiv 3[11] \Longrightarrow 4^5 \equiv 1[11] \Longrightarrow 4^{5n+2} \equiv 5[11]$.
   Donc, $3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2} \equiv 1 + 5 + 5[11] \equiv 0[11] \Longrightarrow 11 \setminus 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$

■

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $13 \setminus 7x + 3y \Longleftrightarrow 13 \setminus 5x + 4y$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est : 0, 1 ou 4.

Solution :

1. $\Rightarrow)$: On a $13 \setminus 7x + 3y \Longleftrightarrow 7x + 3y \equiv 0[13]$.
   D'autre part, $7x + 3y \equiv 0[13] \Longrightarrow 5 \times (7x + 3y) \equiv 0[13] \Longrightarrow 35x + 15y \equiv 0[13]$
   $\Longrightarrow 15x + 12y + 13x + 7x + 3y \equiv 0[13] \Longrightarrow 3 \times (5x + 4y) \equiv 0[13]$;
   et puisque $3 \wedge 13$ alors d'après le théorème de Gauss on a $5x + 4y \equiv 0[13]$.

   $\Leftarrow)$: On a $5x + 4y \equiv 0[13] \Longrightarrow 3 \times (5x + 4y) \equiv 0[13] \Longrightarrow 2 \times (7x + 3y) + x + 6y \equiv 0[13]$
   $\Longrightarrow 2 \times (7x + 3y) + x + 6y + 13x \equiv 0[13] \Longrightarrow 2 \times (7x + 3y) + 2 \times (7x + 3y) \equiv 0[13]$
   $\Longrightarrow 4 \times (7x + 3y) \equiv 0[13]$.
   Puisque $4 \wedge 13$, alors d'après le théorème de Gauss on a $7x + 3y \equiv 0[13]$

2. Soit r le reste de la division euclidienne de n^2 par 8.
   — Si n est pair. Alors, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 4k^2$.

    — Si k est pair. Alors, $k = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 8k'^2 \Longrightarrow r = 0$.
    — Si k est impair. Alors, $k = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 4 \times (4k'^2 + 4k' + 1) = 16 \times (k'^2 + k') + 4 \Longrightarrow r = 4$.

— Si n est impair. Alors, $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 4k^2+4k+1 = 4\times k\times(k+1)+1 = 4 \times 2k' + 1 = 8k' + 1 \Longrightarrow r = 1$.

■

Exercice 4

1. Déterminer les entiers n vérifiant $n - 3 \setminus n^3 - 3$.
2. Déterminer les entiers n vérifiant $n + 1 \setminus n^2 - 3n + 1$.
3. Déterminer les entiers n tels que $\sqrt{\dfrac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. on a $n - 3 \setminus n - 3 \Longrightarrow n - 3 \setminus n^2(n - 3)$.
   Comme $n-3 \setminus n^3-3$ et $n-3 \setminus n^2(n-3)$, alors $n-3 \setminus n^3-3-n^2(n-3) \Longrightarrow n-3 \setminus -3+3n^2$.
   D'autre part, $n-3 \setminus -3+3n^2$ et $n-3 \setminus n-3 \Longrightarrow n-3 \setminus -3+3n^2-3n(n-3) \Longrightarrow n-3 \setminus -1+9n$, et on a $n - 3 \setminus -1 + 9n$ et $n - 3 \setminus n - 3 \Longrightarrow n - 3 \setminus -1 + 9n - 9(n - 3) \Longrightarrow n - 3 \setminus 26$, donc $n - 3 \in \mathcal{D}(26)$.
   Or $\mathcal{D}(26) = \{-26; -13; -2; -1; 1; 2; 13; 26\}$, alors $n - 3 = -26$ ou $n - 3 = -13$ ou $n - 3 = -2$ ou $n - 3 = -1$ ou $n - 3 = 1$ ou $n - 3 = 2$ ou $n - 3 = 13$ ou $n - 3 = 26$ et donc $S = \{-23; -10; 1; 2; 4; 5; 16; 29\}$.
2. on a $n + 1 \setminus n + 1 \Longrightarrow n + 1 \setminus n(n + 1)$.
   Comme $n+1 \setminus n^2-3n+1$ et $n+1 \setminus n(n+1)$, alors $n+1 \setminus n^2-3n+1-n(n+1) \Longrightarrow n+1 \setminus -4n+1$.
   D'autre part, $n + 1 \setminus -4n + 1$ et $n + 1 \setminus n + 1 \Longrightarrow n + 1 \setminus -4n + 1 + 4(n + 1) \Longrightarrow n + 1 \setminus 5$, donc $n + 1 \in \mathcal{D}(5)$.
   Or $\mathcal{D}(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$, alors $n + 1 = -5$ ou $n + 1 = -1$ ou $n + 1 = 1$ ou $n + 1 = 5$ et donc $S = \{-6; -2; 0; 4\}$.
3. On a $\sqrt{\dfrac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 4 \setminus 11n - 5$ et $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{11n-5}{n+4} = m^2$.
   on a $n + 4 \setminus n + 4$ et $n + 4 \setminus 11n - 5 \Longrightarrow n + 4 \setminus 11(n + 4) - (11n - 5) \Longrightarrow n + 4 \setminus 49$, donc $n + 4 \in \mathcal{D}(49)$.
   Or $\mathcal{D}(49) = \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$, alors $n + 4 = -49$ ou $n + 4 = -7$ ou $n + 4 = -1$ ou $n + 4 = 1$ ou $n + 4 = 7$ ou $n + 4 = 49$ et donc $S = \{-53; -11; -5; -3; 3; 45\}$.
   D'autre part,

n	-53	-11	-5	-3	3	45
$\dfrac{11n-5}{n+4}$	12	18	60	38	$4 = 2^2$	10

   et donc la seule solution est $n = 3$.

■

Exercice 5

On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : (E) : $\quad 195x - 232y = 1$.

1. Déterminer $232 \wedge 195$.
2. Donner une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant les relations : $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1[232]$.

Solution :

1. On a
$$\begin{aligned} L_1 : &\quad 232 = 195 \times 1 + 37 \\ L_2 : &\quad 195 = 37 \times 5 + 10 \\ L_3 : &\quad 37 = 10 \times 3 + 7 \\ L_4 : &\quad 10 = 7 \times 1 + 3 \\ L_5 : &\quad 7 = 3 \times 2 + 1 \end{aligned}$$
donc $PGCD(232, 195) = 1$.

2. En posant $a = 232$ et $b = 195$ nous obtenons ;
$$L_1 \Longrightarrow \quad 37 = a - b$$
$$L_2 \Longrightarrow \quad 10 = b - 5 \times 37 = b - 5 \times (a - b) = 6b - 5a$$
$$L_3 \Longrightarrow \quad 7 = a - b - 3(6b - 5a) = 16a - 19b$$
$$L_4 \Longrightarrow \quad 3 = 6b - 5a - (16a - 19b) = -21a + 25b$$
$$L_5 \Longrightarrow \quad 1 = 16a - 19b - 2(-21a + 25b) = 16a + 42a - 19b - 50b = 58a - 69b$$
ainsi, $(-69; -58)$ est une solution particulière de l'équation (E).

3. On a $195x - 232y = 1$ et $195 \times (-69) - 232 \times (-58) = 1$, donc $195 \times (x + 69) - 232 \times (y + 58) = 0$ et par suite $195 \times (x + 69) = 232 \times (y + 58)$.
Or $195 \wedge 232$, alors d'après le théorème de Gauss 195 divise $y + 58$ et donc
$y + 58 = 195k/k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $y = 195k - 58/k \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, $195 \times (x + 69) = 232 \times (y + 58) \Longrightarrow 195 \times (x + 69) = 232 \times 195k$
$\Longrightarrow x + 69 = 232k \Longrightarrow x = 232k - 69$.
Réciproquement, on peut vérifier que $(232k - 69; 195k - 58)$ est une solution de l'équation (E).
Ainsi l'ensemble des sulutions de l'équation (E) est :
$$S = \{(232k - 69; 195k - 58)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

4. On a $195d \equiv 1[232] \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $195d - 232\alpha = 1$, et donc (d, α) est une solution de l'équation (E). Ainsi $d = 232k - 69$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or $0 \leq d \leq 232$, alors $0 \leq 232k - 69 \leq 232 \Longleftrightarrow \dfrac{69}{232} \leq k \leq \dfrac{401}{232} \Longrightarrow k = 1$.
D'ou, $d = 232 \times 1 - 69 = 163$.

■

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : (E) : $\quad 324x - 245y = 7$.

1. Montrer que si $(x; y)$ est solution de l'équation (E), alors $x \equiv 0[7]$.
2. Déterminer $324 \wedge 245$.
3. Donner une solution particulière de l'équation (E).
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

Solution :

1. Montrer que si $(x; y)$ est solution de l'équation (E), alors $x \equiv 0[7]$. Si $(x; y)$ est solution de l'équation (E), alors $324x - 245y = 7 \Longrightarrow 324x = 7 + 245y = 7 \times (1 + 35y) \Longrightarrow 7 \setminus 324x$. Or $324 \wedge 7$, alors d'après le théorème de Gauss on a $7 \setminus x$ ceci implique que $x \equiv 0[7]$.
2. On a
$$L_1 : \quad 324 = 245 \times 1 + 79$$
$$L_2 : \quad 245 = 79 \times 3 + 8$$
$$L_3 : \quad 79 = 8 \times 9 + 7$$
$$L_4 : \quad 8 = 7 \times 1 + 1$$
donc $324 \wedge 245 = 1$.
3. En posant $a = 324$ et $b = 245$ nous obtenons ;
$$L_1 \Longrightarrow \quad 79 = a - b$$
$$L_2 \Longrightarrow \quad 8 = b - 3 \times 79 = b - 3 \times (a - b) = 4b - 3a$$
$$L_3 \Longrightarrow \quad 7 = a - b - 9(4b - 3a) = 28a - 39b$$
$$L_4 \Longrightarrow \quad 1 = 4b - 3a - (28a - 39b) = -31a + 53b$$
ainsi, $7 == -31 \times 7a + 53 \times 7b$ et donc $(-217; -371)$ est une solution particulière de l'équation (E).
4. On a $324x - 245y = 7$ et $324 \times (-217) - 245 \times (-371) = 7$,
donc $324 \times (x + 217) - 245 \times (y + 371) = 0$ et par suite $324 \times (x + 217) = 245 \times (y + 371)$.
Or $324 \wedge 245$, alors d'après le théorème de Gauss 324 divise $y + 371$ et donc
$y + 371 = 324k/k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $y = 324k - 371/k \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, $324 \times (x + 217) = 245 \times (y + 371) \Longrightarrow 324 \times (x + 217) = 245 \times 324k$
$\Longrightarrow x + 217 = 245k \Longrightarrow x = 245k - 217$.
Réciproquement, on peut vérifier que $(245k - 217; 324k - 371)$ est une solution de l'équation (E).
Ainsi l'ensemble des sulutions de l'équation (E) est :
$$S = \{(245k - 217; 324k - 371)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

■

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations :

1. (E_1) : $7x = 5y$.
2. (E_2) : $2xy + 2x + y = 99$.
3. (E_3) : $xy + 3x - 5y = 35$.
4. (E_4) : $6x - 18y = 4$.
5. (E_5) : $3x - 8y = 6$, en déduire l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 7[8] \end{cases}$$

Solution :

1. On a $7x = 5y \Longrightarrow 7 \setminus 5y$. Puisque $7 \wedge 5$, alors $7 \setminus y \Longrightarrow y = 7k/kin\mathbb{Z}$.
   D'autre part, $7x = 5y \Longrightarrow 7x = 5 \times 7k \Longrightarrow x = 5k$. Ainsi, $S_1 = \{(5k; 7k)/kin\mathbb{Z}\}$.
2. On a

$$\begin{aligned} 2xy + 2x + y = 99 &\iff 2x(y+1) + y = 99 \\ &\iff 2x(y+1) + y + 1 = 99 + 1 \\ &\iff (y+1)(2x+1) = 100. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} 100 &= 100 \times 1 = 1 \times 100 = -100 \times (-1) = -1 \times (-100) \\ &= 2 \times 50 = 50 \times 2 = (-2) \times (-50) = (-50) \times (-2) \\ &= 4 \times 25 = 25 \times 4 = (-4) \times (-25) = (-25) \times (-4) \\ &= 20 \times 5 = 5 \times 20 = (-20) \times (-5) = (-5) \times (-20) \\ &= 10 \times 10 = (-10) \times (-10) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{gathered} (y+1 = 100 \text{ et } 2x+1 = 1) \text{ ou } (y+1 = -100 \text{ et } 2x+1 = -1) \\ \text{ou } (y+1 = 1 \text{ et } 2x+1 = 100) \text{ ou } (y+1 = -1 \text{ et } 2x+1 = -100) \\ \text{ou } (y+1 = 2 \text{ et } 2x+1 = 50) \text{ ou } (y+1 = -2 \text{ et } 2x+1 = -50) \\ \text{ou } (y+1 = 50 \text{ et } 2x+1 = 2) \text{ ou } (y+1 = -50 \text{ et } 2x+1 = -2) \\ \text{ou } (y+1 = 4 \text{ et } 2x+1 = 25) \text{ ou } (y+1 = -4 \text{ et } 2x+1 = -25) \\ \text{ou } (y+1 = 25 \text{ et } 2x+1 = 4) \text{ ou } (y+1 = -25 \text{ et } 2x+1 = -4) \\ \text{ou } (y+1 = 20 \text{ et } 2x+1 = 5) \text{ ou } (y+1 = -20 \text{ et } 2x+1 = -5) \\ \text{ou } (y+1 = 5 \text{ et } 2x+1 = 20) \text{ ou } (y+1 = -5 \text{ et } 2x+1 = -20) \\ \text{ou } (y+1 = 10 \text{ et } 2x+1 = 10) \text{ ou } (y+1 = -10 \text{ et } 2x+1 = -10). \end{gathered}$$

et donc

$$\begin{gathered} (y = 99 \text{ et } x = 0) \text{ ou } (y = -101 \text{ et } x = -1) \\ \text{ou } (y = 0 \text{ et } x = \frac{99}{2}) \text{ ou } (y = -2 \text{ et } 2x+1 = \frac{-101}{2}) \end{gathered}$$

$$\begin{array}{c} \text{ou } (y=1 \text{ et } x=\frac{49}{2}) \text{ ou } (y=-3 \text{ et } x=\frac{-51}{2}) \\ \text{ou } (y=49 \text{ et } x=\frac{1}{2}) \text{ ou } (y=-51 \text{ et } x=\frac{-3}{2}) \\ \text{ou } (y=3 \text{ et } x=12) \text{ ou } (y=-5 \text{ et } x=-13) \\ \text{ou } (y=24 \text{ et } x=\frac{3}{2}) \text{ ou } (y=-26 \text{ et } x=\frac{-5}{2}) \\ \text{ou } (y=19 \text{ et } x=2) \text{ ou } (y=-21 \text{ et } x=-3) \\ \text{ou } (y=4 \text{ et } x=\frac{19}{2}) \text{ ou } (y=-6 \text{ et } x=\frac{21}{2}) \\ \text{ou } (y=9 \text{ et } x=\frac{9}{2}) \text{ ou } (y=-11 \text{ et } x=\frac{-11}{2}). \end{array}$$

Ainsi, $S_2 = \{(0;99), (-1;-101), (12;3), (-13;-5), (2;19), (-3;-21)\}$.

3. On a

$$\begin{aligned} xy+3x-5y=35 &\iff y(x-5)+3x=35 \\ &\iff y(x-5)+3x-15=35-15 \\ &\iff y(x-5)+3(x-5)=20 \\ &\iff (x-5)(y+3)=20. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} 20 &= 20\times 1 = 1\times 20 = (-20)\times(-1) = (-1)\times(-20) \\ &= 2\times 10 = 10\times 2 = (-2)\times(-10) = (-10)\times(-2) \\ &= 4\times 5 = 5\times 4 = (-4)\times(-5) = (-5)\times(-4) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{array}{c} (y+3=20 \text{ et } x-5=1) \text{ ou } (y+3=-20 \text{ et } x-5=-1) \\ \text{ou } (y+3=1 \text{ et } x-5=20) \text{ ou } (y+3=-1 \text{ et } x-5=-20) \\ \text{ou } (y+3=2 \text{ et } x-5=10) \text{ ou } (y+3=-2 \text{ et } x-5=-10) \\ \text{ou } (y+1=10 \text{ et } x-5=2) \text{ ou } (y+1=-10 \text{ et } x-5=-2) \\ \text{ou } (y+3=4 \text{ et } x-5=5) \text{ ou } (y+3=-4 \text{ et } x-5=-5) \\ \text{ou } (y+1=5 \text{ et } x-5=4) \text{ ou } (y+1=-5 \text{ et } x-5=-4) \end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{c} (y=17 \text{ et } x=6) \text{ ou } (y=-23 \text{ et } x=4) \\ \text{ou } (y=-2 \text{ et } x=25) \text{ ou } (y=-4 \text{ et } x=-15) \\ \text{ou } (y=-1 \text{ et } x=15) \text{ ou } (y=-5 \text{ et } x=-5) \\ \text{ou } (y=9 \text{ et } x=7) \text{ ou } (y=-11 \text{ et } x=3) \\ \text{ou } (y=1 \text{ et } x=15) \text{ ou } (y=-7 \text{ et } x=0) \\ \text{ou } (y=4 \text{ et } x=9) \text{ ou } (y=-6 \text{ et } x=1). \end{array}$$

Ainsi, $S_3 = \{(6;17), (4;-23), (25;-2), (-15;-4), (15;-1), (-5;-5), (7;9),$
$(3;-11), (15;1), (0;-7), (9;4), (1;-6)\}$.

4. On a $6x-18y=4 \iff 3x-9y=2$.
Puisque $3\wedge 9=3$ ne divise pas 2, alors l'équation (E_4) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

5. On remarque que $(-6;-3)$ est une solution particulière de l'équation (E_5).
On a $3x-8y=6$ et $3\times(-6)-8\times(-3)=6$,
donc $3\times(x+6)-8\times(y+3)=0$ et par suite $3\times(x+6)=8\times(y+3)$.
Or $3\wedge 8=1$, alors d'après le théorème de Gauss 3 divise $y+3$ et donc

$y+3=3k/k\in\mathbb{Z}$, c'est à dire $y=3k-3/k\in\mathbb{Z}$.
D'autre part, $3\times(x+6)=8\times(y+3)\Longrightarrow 3\times(x+6)=8\times 3k$
$\Longrightarrow x+6=8k\Longrightarrow x=8k-6$.
Réciproquement, on peut vérifier que $(8k-6;3k-3)$ est une solution de l'équation (E_5).
Ainsi l'ensemble des sulutions de l'équation (E_5) est :

$$S=\{(8k-6;3k-3)/k\in\mathbb{Z}\}.$$

Pour le système

$$\begin{cases} x\equiv 1[3] \\ x\equiv 7[8] \end{cases}$$

on a $x\equiv 1[3]\iff x-1=3\alpha \quad /\alpha\in\mathbb{Z}$ et $x\equiv 7[8]\iff x-7=8\beta \quad /\beta\in\mathbb{Z}$ et donc $x-1-(x-7)=3\alpha-8\beta\iff 3\alpha-8\beta=6$, c'est à dire que $(\alpha;\beta)$ est une solution de l'équation (E_5).
D'après ce qui précède on a $\alpha=8k-6$ et $\beta=3k-3$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Ainsi, $x=3\alpha+1=3(8k-6)+1=24k-17$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

■

Exercice 8

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation : $11(x\wedge y)+(x\vee y)=203$.

Solution :
Posons $d=x\wedge y$, alors $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$ avec $\alpha\wedge\beta=1$ et tel que $x=\alpha d$ et $y=\beta d$, et donc $x\vee y=d\alpha\beta$.
Ainsi, $11(x\wedge y)+(x\vee y)=203\iff 11d+d\alpha\beta=203$.
On a $11d+d\alpha\beta=203\Longrightarrow d(11+\alpha\beta)=203=29\times 7$. Puisque $11+\alpha\beta>7$, alors $d=7$ et $11+\alpha\beta=29$ et par suite $d=7$ et $\alpha\beta=18=2\times 9=1\times 18$ (on va pas considérer $18=3\times 6$ car $\alpha\wedge\beta=1$).
D'où

$$\begin{aligned} \alpha=2 \text{ et } \beta=9 &\Longrightarrow x=14 \text{ et } y=63 \\ \alpha=9 \text{ et } \beta=2 &\Longrightarrow x=63 \text{ et } y=14 \\ \alpha=1 \text{ et } \beta=18 &\Longrightarrow x=7 \text{ et } y=126 \\ \alpha=18 \text{ et } \beta=1 &\Longrightarrow x=126 \text{ et } y=7, \end{aligned}$$

donc $S=\{(14;63),(63;14),(7;126),(126;7)\}$. ■

Exercice 9

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système d'équation : $\begin{cases} x\wedge y=10 \\ x\vee y=22 \end{cases}$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer $d = (2n-1) \wedge (9n+4)$. En déduire les ensembles
$$A = \{n \in \mathbb{Z} : (2n-1) \wedge (9n+4) = 17\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in \mathbb{Z} : (2n-1) \wedge (9n+4) = 1\}.$$
2. Déterminer l'ensemble $C = \{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-4\} : (n^2 - n - 10) \wedge (n+4) = 5\}$.
3. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $(n^2 + 4n + 1) \wedge (n+1) = 1$

Exercice 11

1. Trouver le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 100^{1000}.
2. Calculer le reste dans la division euclidienne de 19^{55} par 7.
3. Montrer que $9518^{42} \equiv 4[5]$.
4. Montrer que pour tout entier positif n,
$$10^{3n} \equiv 1[37].$$

Exercice 12

1. Montrer que $9518^{42} \equiv 4[5]$.
2. Trouver le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 100^{1000}.
3. Calculer le reste dans la division euclidienne de 19^{55} par 7.
4. En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier positif n,
$$10^{3n} \equiv 1[37],$$
puis trouver le reste de la division de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37.
5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 0[5]$ et que $5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 0[7]$. En déduire que
$$\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$$
.

Exercice 13

1. Donner en base 10 les entiers :
$$\overline{1011}_{(2)}; \quad \overline{3102}_{(4)}; \quad \overline{134}_{(5)}; \quad \overline{3A2}_{(16)}; \quad \overline{1001}_{(b)} \quad \text{où} \quad b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$
2. Dans chacun des cas, donner l'écriture de l'entier dans la base b :
$A = 493$ et $b = 3$; $B = 326$ et $b = 7$; $C = 1832$ et $b = 16$.

Exercice 14

1. Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.
2. Un entier est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair.
3. Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
4. Un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

Exercice 15

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3x - 2y = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que que $(14n + 3, 21n + 4)$ est solution de l'équation (E).
   (b) En déduire que les nombres $2n + 1$ et $21n + 4$ sont premiers entre eux.
3. Soit d le pgcd des nombres $2n + 1$ et $21n + 4$.
   (a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.
   (b) Montrer que : $(d = 13) \iff n \equiv 6[13]$.
4. On pose pour tout entier naturel n : $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
   (a) Montrer que A et B sont divisibles par l'entier $n - 1$.
   (b) Déterminer $A \wedge B$ suivants les valeurs de n.

Exercice 16

$x \wedge y$ est le pgcd des nombres x et y. $\overline{abc}^{(x)}$ est l'écriture du nombre abc dans le système de numération de base x.

1. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : (x + 1)^2 = 9 + 5y$.
   (a) Soit (x, y) une solution de (E). Montrer que : $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 2[5]$.
   (b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{Z}); (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES

I. Résumé du cours

2.1 Séries entières

Définition

On appelle série entière de la variable x une série dont le terme général est de la forme $a_n x^n, n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{converge} \right\}$$

qu'on appelle domaine de convergence de la série entière.

Remarques 7. *(i) La somme partielle* $S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ *est un polynôme de degré n. Une série entière est donc une généralisation de la notion de polynôme.*
(ii) Il est à noter que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *converge lorsque* $x = 0$.

Exemples 5. *1) Le domaine de convergence de* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *est* $\mathcal{D} =]-1; 1[$.

2) Celui de $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ *est* $\mathcal{D} = \{0\}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ *a pour domaine de convergence* $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

4) Le domaine de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *est* $\mathcal{D} = [-1; 1[$.

Une propriété remarquable de ces séries est la suivante :

Théorème

Étant donné une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, il existe un unique nombre $\mathcal{R} \in [0;+\infty]$ tel que :

(i) Si $\mathcal{R} > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout x_0 tel que $|x_0| < \mathcal{R}$ et la série converge normalement dans l'intervalle $[-\rho;\rho], \forall \rho < \mathcal{R}$.
(ii) Si $\mathcal{R} < +\infty$, alors, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge pour tout x_0 tel que $x_0 \notin [-\mathcal{R};\mathcal{R}]$.

Démonstration :
(i) Si $x_0 \neq 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ converge, alors, $\lim_{n\to+\infty} a_n {x_0}^n = 0$,
i.e : $\forall k > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq N) \Rightarrow |a_n {x_0}^n| \leq k$.
Alors, si $|x| < |x_0|$ et $n \geq N$, on a :

$$|a_n x^n| = |a_n {x_0}^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Or, $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, d'où $\sum_{n\geq N} |a_n x^n|$ est majorée par la série géométrique convergente $\sum_{n\geq N} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

Donc, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.

On pose alors $\mathcal{R} := \sup\{r \in [0;+\infty[\text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \text{converge absolument}\}$.

(ii) Si $|x_0| > \mathcal{R}$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ diverge, car sinon, elle convergerait, ce qui contredirait la définition de $\mathcal{R}$. □ ■

Définition

1) Le nombre $\mathcal{R}$ est appelé <u>*rayon de convergence*</u> de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

2) L'intervalle $]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$ est appelé <u>*intervalle ouvert de convergence*</u>.

Remarques 8. *Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple, elle est caractérisée par :*
- $|x| < \mathcal{R} \Rightarrow \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ *est absolument convergente.*
- $|x| > \mathcal{R} \Rightarrow \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ *est divergente.*
- $|x| = \mathcal{R}$ *est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.*
- *pour tout* $r \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $r < \mathcal{R}$, *la série* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ *est normalement convergente pour* $|x| \leq r$.

2.2 Détermination du rayon de convergence

Nous allons énoncer deux critères qui permettent de déterminer $\mathcal{R}$.

Proposition : Critère de D'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière telle que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq 0}$ admette une limite $l \in [0; +\infty]$.
Alors, le rayon de convergence $\mathcal{R}$ de la série est donné par $\mathcal{R} = 1/l$.

Démonstration :
Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l|x|.$$

D'après le critère de D'Alembert pour les séries numériques, on sait que $\sum |a_n x_0^n|$ converge si $l|x_0| < 1$, (i.e : $|x_0| < 1/l$) et diverge si $l|x_0| > 1$ (i.e : $|x_0| > 1/l$). D'où $\mathcal{R} = 1/l$. □ ■

Proposition : Critère de Cauchy (Formule d'Hadamard) pour les séries entières

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière telle que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0; +\infty]$.
Alors, le rayon de convergence est $\mathcal{R} = 1/l$.

Exemples 6. *1).* • $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}\frac{1}{n}x^n$.
On calcule : $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$
Donc $\mathcal{R} = 1$.
On remarquera que pour $x = 1$*, la série diverge et pour* $x = -1$*, elle converge.*

2). • $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}\frac{1}{n!}x^n$ *converge absolument pour tout* x*. En effet :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc, $\mathcal{R} = +\infty$.

3). • $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}x^n$ *a pour rayon de convergence* $\mathcal{R} = e$ *. En effet :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty}e^{n(\frac{-1}{n}+\circ(\frac{1}{n}))} = e^{-1}.$$

Donc, $\mathcal{R} = e$.

Proposition

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)$ deux séries entières de rayons $\mathcal{R} > 0$ et $\mathcal{R}' > 0$.

- Si $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$, le rayon de convergence $\mathcal{R}''$ de $\left(\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n\right)$ est $\mathcal{R}'' = \min(\mathcal{R}; \mathcal{R}')$.
- Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, le rayon de convergence de la série $\left(\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n\right)$ est $\mathcal{R}'' \geq \mathcal{R}$.

Exemple 7. *Dans le cas où $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, le rayon $\mathcal{R}''$ de la série somme peut être tel que $\mathcal{R}'' > \mathcal{R}$. Par exemple, $\left(\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n!}+1)x^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n!}-1)x^n\right)$ dont le rayon de convergence est égal à 1, la série somme a un rayon de convergence infini.*

2.3 Propriétés de la somme

Dans ce paragraphe, on va étudier les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'integrabilité de la fonction somme des séries entières.

Proposition : Continuité

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$ et soit $f :]-\mathcal{R};\mathcal{R}[\to \mathbb{R}$ sa somme définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, f est alors continue sur $]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $0 < r < \mathcal{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque les fonctions $f_n(n) = a_n x^n$ sont continues sur $[-\mathcal{R};\mathcal{R}]$ et la convergence est normale donc uniforme sur $[-r;r]$, f est alors continue sur $[-r;r]$ pour tout r tel que $0 < r < \mathcal{R}$ donc continue sur $]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$. □ ■

Théorème :Convergence au bord

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$.
Si $\sum_{n\geq 0} a_n \mathcal{R}^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n(-\mathcal{R})^n$) converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0;\mathcal{R}]$ (resp. sur $[-\mathcal{R};0]$).

Remarque 9. *Sous les conditions du théorème précédent, la fonction somme est continue en $\mathcal{R}$ (resp. en $-\mathcal{R}$).*

Exemples 8. *1) la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1;1]$.*

2) la fonction $g(x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1;1]$.

Proposition : Intégration

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$. Pour tout x tel que $0 < |x| < \mathcal{R}$ ona :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Démonstration :
c'est une conséquence immédiate de la convergence normale, donc de la convergence uniforme de la série proposée sur $[0;x]$ □ ■

Proposition

La série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Démonstration :
Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est $\mathcal{R}$ car :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

. □ ■

Remarque 10. *Les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ont le même intervalle ouvert de convergence, mais elles peuvent avoir des comportements différents au bord de cet intervalle.*
Par exemple, $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ diverge pour $x = 1$ mais $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$.

Dérivation

La série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Démonstration :
Soit $|x| > \mathcal{R}$. Ona $|a_n x^n| \leq n|a_n x^{n-1}|$, pour $n > |x|$.
La série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ étant divergente, donc la série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est divergente.

Soit $|x| < \mathcal{R}$ et x_0 tel que $|x| < |x_0| < \mathcal{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n {x_0}^n$ étant convergente, il existe $M > 0$ tel que $| a_n {x_0}^n | \leq M$,

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad |n a_n x^{n-1}| = |n a_n {x_0}^n \frac{x^{n-1}}{{x_0}^n}| \leq \frac{M}{|x_0|} n \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1}$$

Or $\left| \frac{x}{x_0} \right| = p < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} n p^{n-1}$ est convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est convergente. D'où, $\mathcal{R}$ est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$. □ ■

Théorème

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$ et de somme $S(x)$.

S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathcal{R},\mathcal{R}[$ et pour tout x dans $]-\mathcal{R},\mathcal{R}[$ ona :

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}\left(a_n x^n\right) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}x^n \end{aligned}$$

En particulier,

$$S^{(k)}(0) = k!a_k \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad x \in]-\mathcal{R},\mathcal{R}[.$$

Proposition

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)$ deux séries entières de rayons $\mathcal{R} > 0$ et $\mathcal{R}' > 0$.
On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0. Alors ces deux séries sont identiques : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$

Démonstration :

Sinon, soit $N \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $a_N \neq b_N$. Il existe $r > 0$ tel que $r < \mathcal{R}$, $r < \mathcal{R}'$ et les deux sommes coïncident sur $]-r;r[$.

On a alors :

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = x^N \sum_{n\geq N} a_n x^{n-N} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

et

$$\sum_{n\geq 0} b_n x^n = x^N \sum_{n\geq N} b_n x^{n-N} + \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^n$$

Comme ces deux séries sont égales et $\forall n \leq N-1, a_n = b_n$, alors pour tout $x \in]-r;r[$, on a :

$$\sum_{n\geq N} a_n x^{n-N} = \sum_{n\geq N} b_n x^{n-N}$$

En particulier, pour $x = 0$ on obtient $a_N = b_N$ d'où une contradiction. □ ■

Conséquence

La somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une fonction paire (resp. impaire) ssi les a_n de rang impair (resp. pair) sont nuls.

Démonstration :

Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est paire, alors : $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n(-x)^n$ pour tout n, donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_n$ et en particulier $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = (-1)a_{2k+1}$ ce qui implique que $a_{2k+1} = 0$. □ ■

2.4 Développement en série entière

2.4.1 Définition et Théorème

Définition

Soit f une fonction définie sur $]-\alpha,\alpha[$, $\alpha>0$.

On dit que f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$ s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon $\mathcal{R}\geq\alpha$ telle que :

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \forall x\in]-\alpha,\alpha[.$$

Rappels

Rappel 1 : Une fonction f développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f admet en 0 un développement limité à tout ordre.

Rappel 2 : Théorème de Taylor :

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$, alors $\forall x\in]-\alpha,\alpha[$ on a :

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

où : $R_n(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt$

ou bien $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$ avec $0<\theta<1$.

Théorème

f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ et, $\forall x\in]-\alpha,\alpha[$, la suite des restes de Taylor converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

C'est-à-dire que pour tout x, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Exemples 9.

$$\begin{aligned}f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)=f(x)\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|=0\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0\end{aligned}$$

□

Corollaire : Condition suffisante

Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ et $\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \forall n \geq 0, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ alors f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$ et $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration :
Si $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, alors :

$$|R_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge d'où le terme général $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). □

■

2.4.2 Exemples de développement en série entière

Fonction exponentielle

$f(x) = e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est développable en série entière sur $]-\infty,+\infty[$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

En effet $f^{(n)}(0) = e^0 \ \forall n \geq 1$
d'où $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ avec $0<\theta<1$
$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

car, pour tout x, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ est un terme général d'une série convergente.

Remarque 11. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Fonction circulaire

$f(x) = \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

car $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1$
donc :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \quad (0<\theta<1) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Fonction logarithme

$f(x)=\log(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. En effet, $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ est une série géométrique de rayon de convergence $\mathcal{R}=1$.

d'où par intégration :

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x|<1) \end{aligned}$$

Remarque 12. *Pour $x=1$, la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge.*
En admettant la continuité de la fonction somme en $x=1$,
on obtient $\log(2)=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$

4.3 : Zéros d'une série entière

Proposition

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}>0$

et soit $f := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

i) Si $f^{(n)}(0)=0\ \forall n\geq 0$, alors f est identiquement nulle, car

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n=0,\ \forall x\in]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$$

ii) Si $f(0)=0$, mais f n'est pas identiquement nulle sur $]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$,

alors, il existe $\rho : 0<\rho\leq\mathcal{R}$ t.q. f ne s'annule pas sur $]-\rho;\rho[$, sauf en $x=0$.

(Donc, $f(x)\neq 0, \forall x : 0<x\leq\rho$).

Démonstration :

On peut supposer qu'il existe $m \geq 1$ tel que : $a_m \neq 0$

$$f(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k x^k$$

Un tel $a_m \neq 0$ existe car sinon $f \equiv 0$ sur $]-\mathcal{R}, \mathcal{R}[$.

Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m[a_m + a_{m+1}x + \cdots] \\ &= x^m \left[a_m + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{m+k}x^k \right] \\ &= x^m[a_m + h(x)] \end{aligned}$$

avec $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{m+k}x^k$

$h(0) = 0$, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car c'est une série entière convergente) donc h est continue.
Finalement, par continuité de h, $\exists \rho > 0$ tel que $|x| < \rho \Rightarrow |h(x) - 0| < |a_m|$
d'où $f(x) = x^m[a_m + h(x)] \neq 0, \quad 0 < |x| < \rho$. □ ■

2.5 Application aux équations différentielles

On peut parfois exprimer, à l'aide de leur développement en série entière, les solutions d'une équation différentielle.

Théorème

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série de rayon de convergence $\mathcal{R} > 0$.

Alors, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\mathcal{R}; \mathcal{R}[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ sur $]-\mathcal{R}; \mathcal{R}[$.

Exemple 10. *Résoudre le système :* $(*) \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Solution

Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution, alors,

$$\begin{aligned}
y'' + y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \forall n \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

D'après le critère de D'Alembert, ces séries convergent sur $]-\infty; +\infty[$. Donc,

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0 \\
\text{et } y'(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = 1
\end{aligned}$$

D'où $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} (= \sin(x))$ est la solution recherchée. $\square$

Formulaire

Développements en séries entières usuels

Fonction	Développement en série entière (DSE)	Intervalle de validité du DSE
$x \mapsto e^x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$ Où $\alpha \in \mathbb{R}$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \ldots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \frac{5x^6}{16} + \ldots$	$]-1;+1[$

$x \mapsto \ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \operatorname{arg\,tanh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \arctan x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \arcsin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \dots$	$]-1;+1[$
$x \mapsto \operatorname{arg\,sinh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots$	$]-1;+1[$

2.6 Exercices avec solutions proposés

Exercice 1

1. Développer en séries entières la fonction suivantes en déterminant leur rayon de convergence :
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(1+2x)}.$$
2. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $]-R, R[$, la somme
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?.
3. On considère l'équation différentielle suivante :
$$(E) : y'' - 2xy' - 4y = 2.$$
En utilisant les séries entières, déterminer la fonction f solution de l'équation (E) avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Solution :

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(1+2x)}$.
Tout d'abord, la décomposition de f en éléments simples nous donne :
$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{1+2x}.$$
— **Développement de la fonction** $\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}$:
pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ on a
$$\frac{\frac{1}{3}}{x-1} = \frac{\frac{-1}{3}}{1-x} = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$
— **Développement de la fonction** $\dfrac{\frac{-3}{2}}{1+2x}$:
pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{2}$ on a
$$\frac{\frac{-3}{2}}{1+2x} = \frac{-3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2x)^n = \frac{-3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^n x^n.$$
Ainsi, le Développement de la fonction f est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(1; \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$ par :
$$f(x) = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{-3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3} + \frac{-3}{2}(-1)^n 2^n\right)x^n.$$
2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

— **Rayon de convergence** :
On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, donc $R=1$.

— **Somme de la série** : On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n &= x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'\\ &= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'\\ &= x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-1\right)'\\ &= x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)'\\ &= x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\\ &= x\times\frac{1}{(1-x)^2}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Dans le cas $|x|=1$, les séries numériques $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot(-1)^n$ sont grossièrement divegentes.

3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E): y''-2xy'-4y=2.$$

Soit $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une solution de l'équation (E).

On a $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$, donc

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) &\iff f''(x)-2xf'(x)-4f(x)=2\\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=2\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=2\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=2\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n\right)x^n=2\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n\right)x^n=2.\end{aligned}$$

Donc,

— pour $n=0$ on a $(0+2)(0+1)a_{0+2}-2(0+2)a_0=2\Longrightarrow a_2=1+2a_0$. Or $a_0=f(0)=0$, alors $a_2=1$. On a aussi, $a_1=f'(0)=1$.

— pour $n \geq 1$ on a

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+2)a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+2} = \frac{2}{n+1} \cdot a_n.$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{2} \cdot a_1 = \frac{2}{2} & a_4 &= \frac{2}{3} \cdot a_2 = \frac{2}{3} \\ a_5 &= \frac{2}{4} \cdot a_3 = \frac{2 \times 2}{2 \times 4} & a_6 &= \frac{2}{5} \cdot a_4 = \frac{2 \times 2}{3 \times 5} \\ a_7 &= \frac{2}{6} \cdot a_5 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 4 \times 6} & a_8 &= \frac{2}{7} \cdot a_6 = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 5 \times 7} \end{aligned}$$

....

....

par itération nous obtenons :

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 ...... \cdot 2n} = \frac{2^n}{2^n \times n!} = \frac{1}{n!}$$

et

$$a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 ..... \cdot (2n-1)} = \frac{2^{n-1} \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ...2n}{(2n)!} = \frac{2^{n-1} \times 2^n \times n!}{(2n)!} = \frac{2^{2n-1} \times n!}{(2n)!}$$

Ainsi, la solution est

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1} \times n!}{(2n)!} \cdot x^{2n}. \end{aligned}$$

■

Exercice 2

1. Développer en séries entières les fonctions suivantes en déterminant le domaine de convergence :

   a. $f(x) = \dfrac{1}{2+x} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

   b. $g(x) = \dfrac{1}{4} \ln(4x+1)$.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - xy' - 3y = 0.$$

   En utilisant les séries entières, déterminer la fonction f solution de l'équation (E) avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Solution :

1. ***a.*** On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

— **Développement de la fonction** $\dfrac{1}{(2+x)}$:

On a $\dfrac{1}{(2+x)} = \dfrac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\dfrac{x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$ on a

$$\frac{1}{(2+x)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n.$$

— **Développement de la fonction** $\dfrac{1}{(1-x)^2}$:

On a $\dfrac{1}{(1-x)^2} = -\left(\dfrac{1}{(1-x)}\right)'$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n.$$

Ainsi, le Développement de la fonction f est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(1;2) = 1$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + n + 1\right)x^n.$$

b. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x+1)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|4x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{4}$ on a

$$g(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4x)^n}{n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n-1}}{n}x^n$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - xy' - 3y = 0.$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de l'équation (E).

On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, donc

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) &\iff f''(x) - xf'(x) - 3f(x) = 0 \\
&\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - 3a_n\right)x^n = 0 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+3)a_n\right)x^n = 0.
\end{aligned}$$

Donc,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+3)a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+2} = \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \times a_n.$$

Donc,

$a_2 = \frac{3}{1\times 2} \times a_0$; $\qquad a_3 = \frac{4}{2\cdot 3} \times a_1$

$a_4 = \frac{5}{3\times 4} \times a_2 = \frac{3\times 5}{2\times 3\times 4} \times a_0$; $\qquad a_5 = \frac{6}{4\times 5} \times a_3 = \frac{4\times 6}{2\times 3\times 4\times 5} \times a_1$

$a_6 = \frac{7}{5\times 6}\times a_4 = \frac{3\times 5\times 7}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}\times a_0$; $\qquad a_7 = \frac{8}{6\times 7}\times a_5 = \frac{4\times 6\times 8}{2\times 3\times 4\times 5\times 7}\times a_1$

....

....

par itération nous obtenons :

$$a_{2n+1} = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot .....\cdot (2n+2)}{2\cdot 3\cdot 4.....\cdot (2n+1)} \times a_1 = \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!} \times a_1$$

et

$$a_{2n} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot .....\cdot (2n+1)}{2\cdot 3\cdot 4.....\cdot (2n)} \times a_0 = \frac{(2n+2)!}{(2n)! \times 2^n \times (n+1)!} \times a_0.$$

— On $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$, donc $a_{2n+1} = \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!}$ et $a_{2n} = 0$.

Ainsi, la solution est

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

■

Exercice 3

1. Calculer les sommes des séries entières de termes généraux :

   a. $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

   b. $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$.

2. Développer en séries entières les fonctions suivantes, :

   a. $f(x) = \arctan(2x)$.

   b. $g(x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{(1+2x)^2}$.

Solution :

1. ***a.*** Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

   On a $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Donc, par dérivation de développement en série entière on obtient $(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$ et par intégration de développement en série entière on aura $xS(x) = \int_0^x \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.

Ainsi, pour $x \neq 0$ on a $S(x) = \dfrac{1}{2x}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$ et pour $x = 0$ on a $S(0) = 1$.

b. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. On a $S(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-x^2)^n}{n!} = xe^{-x^2}$.

2. Développer en séries entières les fonctions suivantes :

a. On remarque que $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $4x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{2}$ on a :

$$f'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(4x^2)^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{n} x^{2n},$$

ainsi, par intégration de développement en série entière on aura

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

b. **Développement de la fonction** $\dfrac{1}{(1+3x)}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3}$ on a

$$\frac{1}{(1+3x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot 3^n \cdot x^n.$$

c. **Développement de la fonction** $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$:

On a $\dfrac{1}{(1+2x)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(1+2x)}\right)'$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{2}$ on a

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (2x)^n\right)' = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot(-1)^n\cdot(2x)^{n-1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot x^n.$$

Ainsi, le Développement de la fonction f est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{3}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot 3^n \cdot x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n \cdot 3^n - \frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^n\right)\cdot x^n. \end{aligned}$$

■

Exercice 4

1. Calculer les sommes suivantes :

a. $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2-n+2}{n!} x^n$

2. Développer en séries entières ces deux fonctions :

a. $f(x) = \dfrac{3x}{(3+x)^3}$

b. $g(x) = \ln(3+x)$

Solution :

1. **a.** Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$. Tout d'abord, remarquons que $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$.
Donc, si $x \neq 0$;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\ln(1+x) + \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\ln(1+x) + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - x + \frac{x^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\ln(1+x) + \frac{1}{x}\ln(1+x) - 1 + \frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors $S(0) = 0$.

b. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-n+2}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= x^2 e^x + 2e^x = (x^2+2)e^x.
\end{aligned}$$

2. Développer en séries entières ces deux fonctions :

a. Remarquons que $\frac{1}{(3+x)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x}\right)''$.
Or $\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\frac{x}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$ on a :

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n}$$

et donc $\left(\frac{1}{3+x}\right)'' = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n+1) \frac{x^{n-2}}{3^n}$

et par suite $\frac{1}{(3+x)^3} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n+1) \frac{x^{n-2}}{3^n}$

$\Longrightarrow \frac{3x}{(3+x)^3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n+1) \frac{x^{n-1}}{3^n}$.

b. On a $g(x) = \ln(3+x) = \ln 3 + \ln(1+\frac{x}{3})$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\frac{x}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$ on a :

$$g(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

■

Exercice 5

Étudier la convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}+2} x^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (nx)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+\ln n}{n^2+1} x^n$ **d)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x+1)^n}{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})x^n$, **f)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$ **g)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (2+\frac{1}{n})^n x^n$

h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2} x^n$ **i)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-2)^n \frac{x^{3n+1}}{n+1}$ **j)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n$, **k)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{\ln n} x^n$

.

Exercice 6

Déterminer les rayons de convergence et calculer les sommes des séries entières de termes généraux :

a) $u_n(x) = \dfrac{n+1}{n!} x^n$ **b)** $u_n(x) = (2n+1)x^n$ **c)** $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)}$

d) $u_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ **e)** $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$.

Exercice 7

Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions suivantes, en précisant le domaine de convergence :

a) $f(x) = \dfrac{1}{3+x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{(3+x)^2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

d) $h(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ **d)** $i(x) = \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y^{''} - 2xy^{'} - 4y = 0.$$

1. Chercher toutes les solutions de (E) de la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, définies sur $]-R, R[$, avec $R > 0$, qui satisfait aux conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
2. Donner le rayon de convergence de la série obtenue.
3. Exprimer f au moyen de fonctions usuelles.

Exercice 9

Développer en série entière la fonctions $f(x) = \left(\arcsin(x)\right)^2$.

(Ind : montrer que f vérifie une équation différentielle du seconde ordre.)

CHAPITRE 3

SÉRIES DE FOURIER

I. Résumé du cours

3.1 Séries trigonométriques

Définition

On appelle série trigonométrique réelle toute série de fonctions de la forme :

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, a_n, $b \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in N$.

Remarque 13. *Supposons que la série (1) converge et posons*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$ *on a :*

$$\cos(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \cos(n\omega x) \quad et \; \sin(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \sin(n\omega x),$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + \frac{2k\pi}{\omega})$ *et donc* f *est périodique de période* $\frac{2\pi}{\omega}$.

Théorème

Si les séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc elle est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour $x \neq \dfrac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

On a $\cos(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$ et $\sin(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$, donc

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}.$$

On Posant $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ et $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
(1) &= c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \\
&= c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.
\end{aligned}$$

3.1.2 Coefficients d'une série trigonométrique

<u>**Cas réelle**</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx \\
&= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx \\
&= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>**Cas complexe**</u> : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx \\
&= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remarque 14. ✓ *Si f est une fonction paire, alors :*

$$a_n = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx; \text{ et } b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si f est une fonction paire 2π-périodique, alors :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \text{ et } b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

✓ *Si f est une fonction impaire, alors :*

$$b_n = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx; \;\; et \; a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si f est une fonction impaire 2π-périodique, alors :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx; \;\; et \; a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.2 Séries de Fourier

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période 2π.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ (donc $\omega = 1$). On suppose que $\int_I |f(t)|dt$ converge sur un intérvalle $I = [\alpha, \alpha + 2\pi]$ de longeur 2π, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle série de Fourier associé à la fonction f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$.

Deux questions se posent :

— La série de Fourier associé à f est-elle convergente ?.

— En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?.

Le théorème de Direchlet et le théorème de Jordan répondent à ces deux questions. Avant d'entamer ces théorèmes, il convient derepréciser les différents types de notations et définitions qui interviennent dans les démonstrations.

Définition

Une fonction f est dite admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 exisent.

Notations

Nous noterons par $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.

Définition

Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceau sur $[a, b]$ si f est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points qui sont des points de première espèce.

Définition

Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lisse (de classe C^1) par morceau sur $[a, b]$ si f et f' sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

Maintenant on ait à la position d'énoncer le théorème de Direchlet.

Théorème de Direchlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Les discontinuités de f (s'il existe) sont de première espèce et sont en nombre fini.
2. f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \begin{cases} f(x), & \text{si f est continue en x} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si f est discontinue en x.} \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Application 2. *Soit $f :]\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, définie par $f(x) = x$.*
La fonction f vérifié les conditions de Dirichlet, en effet :

- *Les points de discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ qui sont de première espèce car $f(\pi^+) = \pi$ et $f(\pi^-) = \pi$.*
- *f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :*

$$\lim_{x \longrightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1,$$

Donc f est développable en série de Fourier.
Or f est impaire, alors :

$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad et \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ainsi, la série de Fourier converge vers f et on a :

$$f(x) = 2 \sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

Théorème de Jordan

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e f est bornée).
2. On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles $[\alpha_1, \alpha_2[$, $[\alpha_2, \alpha_3[$..., $[\alpha_{n1}, \alpha_n]$, avec $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_n = \alpha + 2\pi$ tels que la restriction de f à $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ soit monotone et continue.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{+\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=\begin{cases} f(x), & \text{si f est continue en x} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & \text{si f est discontinue en x.}\end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Application 3. *Soit $f:[\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, définie par $f(x)=|x|$.*
La fonction f vérifié les conditions de Jordan, en effet :

- *On a $|f(x)|\leq\pi$.*
- *La restriction de f sur $[\pi,0]$ est continue décroissante, et la restriction de f sur $[0,\pi]$ est continue croissante.*

Donc f est développable en série de Fourier.
Or f est paire, alors :

$$b_n=0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

et

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\pi \quad et \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\begin{cases}0, & si\ n\ pair\\ \dfrac{-4}{\pi n^2}, & si\ n\ impair\end{cases}.$$

Ainsi, la série de Fourier converge vers f et on a :

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-2\sum_{1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme.

3.3 Egalité de Parseval

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{\omega}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}}f^2(x)dx=2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n^2|.$$

En particulier, Si f est 2π-périodique, alors :

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

De plus,

$$f \text{ paire } \Rightarrow f^2 \text{ paire } \Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{1}^{+\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)dx.$$

$$f \text{ impaire } \Rightarrow f^2 \text{ paire } \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty}b_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)dx.$$

3.4 Exercices avec solutions proposés

Exercice 1

f étant une fonction de période 2π telle que :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \in]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.
2. Montrer que cette série est convergente et déterminer sa somme.
3. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$.

<u>Solution</u> :

f étant une fonction de période 2π telle que :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \in]-\pi, \pi].$$

Tout d'abord, on a $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

1. On remarque que la fonction f est paire, donc
   — $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   — $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 + 1dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{x^3}{3} + x\right]_0^\pi = \dfrac{2(\pi^2+3)}{3}$
   — $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (x^2+1)\cos(nx)dx$;
   on utilisant une intégration par parties, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[(x^2+1)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{2}{n} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(nx)dx\right)$$

   on utilisant une intégration par parties pour une deuxième fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{4}{n\pi} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(nx)dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left(\left[x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left(\pi \cdot \frac{-(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left(\pi \cdot \frac{-(-1)^n}{n} + 0\right) = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

   donc, la série de Fourier associée à f est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2+3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx).$$

2. Après le traçage de la courbe de f par exemple sur l'intervalle $]-3\pi; 3\pi]$ on peut remarquer que la fonction f est continue et donc n'admet pas de points de discontinuité. De plus, la fonction f est dérivable en chaque point de l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Donc, d'après le théorème de Direchlet, la série de Fourier associée à f est uniformément convergente vers f et on a dans ce cas,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2+3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx).$$

3. Pour $x = 0$ on a

$$f(0) = \frac{\pi^2+3}{3} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos(0) \implies 1 = \frac{\pi^2+3}{3} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$
$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

■

Exercice 1

f étant une fonction de période 2π telle que :

$$f(x) = |x| + 1 \text{ si } x \in]-\pi, \pi].$$

1. Tracer la courbe de f sur $]-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Montrer que cette série est convergente et déterminer sa somme.
4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Solution :

f étant une fonction de période 2π telle que :

$$f(x) = |x| + 1 \text{ si } x \in]-\pi, \pi].$$

Tout d'abord, on a $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

1. Courbe de f sur $]-3\pi; 3\pi]$.
2. On remarque que la fonction f est paire, donc
   — $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   — $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| + 1dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x + 1dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{x^2}{2} + x\right]_0^{\pi} = \pi + 2.$
   — $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos(nx)dx$;
   on utilisant une intégration par parties, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[(x+1)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 - \left[\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right).$$

   donc, la série de Fourier associée à f est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)\cos(nx).$$

3. Après le traçage de la courbe de f sur l'intervalle $]-3\pi; 3\pi]$ on peut remarquer que la fonction f est continue et donc n'admet pas de points de discontinuité. De plus, la fonction f est dérivable en chaque point de l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Donc, d'après le théorème de Direchlet, la série de

Fourier associée à f est uniformément convergente vers f et on a dans ce cas,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi+2}{2} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) \cos(nx) \\
&= \frac{\pi+2}{2} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2n+1} - 1}{(2n+1)^2}\right) \cos((2n+1)x) + \sum_{1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2n} - 1}{2n^2}\right) \cos(2nx) \\
&= \frac{\pi+2}{2} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-1-1}{(2n+1)^2}\right) \cos((2n+1)x) + 0 \\
&= \frac{\pi+2}{2} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-2}{(2n+1)^2}\right) \cos((2n+1)x).
\end{aligned}$$

4. Pour $x = 0$ on a

$$\begin{aligned}
f(0) = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-2}{(2n+1)^2}\right) \cos(0) \quad &\Longrightarrow \quad 1 = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-2}{(2n+1)^2}\right) \\
&\Longrightarrow \quad 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \sum_{0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

■

CHAPITRE 4

AJUSTEMENT ET RÉGRESSION

I. Résumé du cours

4.1 Ajustement affine graphique

Soient les n points du nuage représentant, dans un repère cartésien, la série des n valeurs (x_i, y_i) des variables x et y. Ajuster une droite (D) à ce nuage de points consiste à remplacer chaque point (x_i, y_i) par un point de même abscisse et d'ordonnée $\widehat{y}_i$, les points $(xi, \widehat{y}_i)$ étant alignés sur la droite (D).

Une fois l'équation de la droite (D) déterminée, on pourra l'utiliser pour faire des interpolations (calculs de valeurs intermédiaires) et des extrapolations (calculs de valeurs futures).

Méthode :

La méthode graphique consiste à tracer, à l'oeil, à l'aide d'une règle transparente, une droite $y = m \cdot x + h$ s'ajustant le mieux possible sur le nuage de points.
Une fois la droite tracée, on choisit sur le dessin deux points A et B quelconques de la droite pour en déterminer l'équation. Ces points ne doivent pas obligatoirement faire partie du nuage de points.

Exemple 11. *Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :*

x	*1*	*2*	*3*	*3.5*	*4*	*4.5*	*5*	*5.5*	*6*	*7*
y	*15*	*15.5*	*16.5*	*17*	*17.5*	*17*	*18*	*18*	*18.25*	*19*

Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs par la méthode graphique.

4.2 Droite de Mayer

Méthode :

On découpe le nuage de points en deux sous-ensembles de même effectif. Pour chacun des deux sous-ensembles, on calcule la moyenne des x_i et la moyenne des y_i. On obtient ainsi deux points $(\overline{x_1}, \overline{y_1})$ et $(\overline{x_2}, \overline{y_2})$, appelés points moyens. Il reste à tracer la droite passant par ces deux points.

4.3 Ajustement analytique par la méthode des moindres carrés

L'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer la droite (que l'on appelle aussi droite de régression) telle que la somme des carrés des n valeurs $y_i - \widehat{y}_i$ soit minimale (ce qui explique le nom de la méthode).
Où $\widehat{y}_i$ est la coordonnée verticale du point de la droite d'abscisse x_i. Donc $\widehat{y}_i = ax_i + b$.

On veut donc minimiser la quantité $q = \sum(y_i - (ax_i + b))^2$. C'est à dire, chercher a et b pour lesquelles la quantité q soit minimale.
Rappelons que la valeur minimale d'une fonction se calcule en posant sa dérivée égale à 0. Pour trouver a et b, calculons cette dérivée.
Donc, pour trouver a et b on va résoudre le système suivant

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{dq}{da} = 0 \\ \dfrac{dq}{db} = 0 \end{cases}.$$

On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma x_i y_i = a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i \\ \Sigma y_i = \Sigma a x_i^2 + nb \end{cases}.$$

Donc, $\overline{y} = a\overline{x} + b$
$\Longrightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$ avec $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\Sigma y_i$ et $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\Sigma x_i$
$\Longrightarrow a = \dfrac{\Sigma x_i y_i - \overline{y}\Sigma x_i}{\Sigma x_i^2 - \overline{x}\Sigma x_i} = \dfrac{\frac{1}{n}\Sigma x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \overline{x}^2} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$

Conclusion :

La droite des moindres carrés $y = ax + b$ a pour coefficients :

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ et } b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

Exemple 12. *Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.1	3.1	4.7	7.3	9.2	11.1	12.9	15.4	17	18

1. *Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs par la méthode des moindres carrés.*
2. *Tracer cette droite.*
3. *Interpoler la valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 11.5$.*

4.4 Coefficient de corrélation linéaire

On appel coefficient de corrélation linéaire des variables x et y, le nombre réel :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

avec $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\Sigma x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \overline{x}^2}$ et $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma y_i^2 - \overline{y}^2}$.

Interprétation :

- r est un nombre réel compris entre -1 et 1.
- Quand $|r| = 1$, tous les points sont alignés.
- Quand $|r|$ est proche de 1, les variables x et y sont fortement corrélées.
- Quand $r < 0$, la droite de régression a une pente négative.
- Quand $r > 0$, la droite de régression a une pente positive.

4.5 Ajustements non linéaires :

Dans certains cas, l'ajustement à une fonction linéaire n'est pas adéquat : un ajustement des données à une fonction non linéaire doit être envisagé. Les cas que nous considérerons sont ceux où on peut se ramener par une simple transformation à un ajustement affine.

4.5.1 Ajustement par une hyperbole :

Les points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une certaine hyperbole de la forme $\widehat{y} = \frac{1}{ax+b}$.

Méthode

- calculer $z_i = \frac{1}{y_i}$;
- déterminer l'équation de la droite de régression de z en x avec la méthode des moindres carrés ;
- de l'équation obtenue $z = ax + b$, on déduit immédiatement l'équation de l'hyperbole

$$\widehat{y} = \frac{1}{ax+b}.$$

Exemple 13. *Ajuster ce nuage des points par une hyperbole.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.1	0.4	0.19	0.15	0.08	0.05	0.06	0.05	0.04	0.03

4.5.2 Ajustement par une fonction puissance :

Les points $(x_i; y_i)$ sont proches d'une courbe de fonction puissance comme $\widehat{y} = bx^a$. On remarque que $ln(y) = aln(x) + ln(b)$.

Méthode

- calculer $u_i = \ln(x_i)$ et $v_i = \ln(y_i)$;
- déterminer l'équation de la droite de régression de v en u avec la méthode des moindres carrés ;
- de l'équation obtenue $v = Au+B$, on déduit l'équation de la fonction puissance $\widehat{y} = bx^a$, puisque $a = A$ et $b = e^B$.

Exemple 14. *Ajuster ce nuage des points par une fonction puissance.*

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	0.2	0.4	1.2	2.15	5	7.75	11.2	15.5	22	28

4.5.3 Ajustement par une exponentielle :

Les points $(x_i; y_i)$ sont proches d'une courbe d'une exponentielle de la forme $\widehat{y} = ba^x$. On remarque que $ln(y) = xln(a) + ln(b)$.

Méthode

- calculer $z_i = \ln(y_i)$;
- déterminer l'équation de la droite de régression de z en x avec la méthode des moindres carrés ;
- de l'équation obtenue $z = Ax+B$, on déduit l'équation de la fonction puissance $\widehat{y} = ba^x$, puisque $a = e^A$ et $b = e^B$.

Exemple 15. *Ajustez ce nuage de points par une exponentielle.*

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	0.2	0.4	0.5	6	7	1.1	1.6	2.4	3.3	4

4.5.4 Ajustement par une fonction logarithmique :

Les points $(x_i; y_i)$ sont proches d'une courbe d'une exponentielle de la forme $\widehat{y} = a\ln(x) + b$.

Méthode

- — calculer $z_i = \ln(x_i)$;
- — déterminer l'équation de la droite de régression de y en z avec la méthode des moindres carrés ;
- — de l'équation obtenue $y = az + b$, on déduit l'équation de la fonction logarithmique $\widehat{y} = a\ln(x) + b$.

Exemple 16. *Ajustez ce nuage de points par une fonction logarithmique.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.0	2.9	4.5	5.2	5.9	6.6	7.1	7.4	7.8	8.3

4.6 Exercices avec solutions proposés

Exercice 1

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	14	19	27	28	35	45	63	69

Ajuster ce nuage de points par une fonction exponentielle.

<u>Solution</u> :

On a

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	14	19	27	28	35	45	63	69
z=ln(y)	1.6	2.64	2.94	3.29	3.33	3.55	3.8	4.14	4.23

Déterminons l'équation de la droite de régression de z en x avec la méthode des moindres carrés. On a

$$z = Ax + B \text{ avec } A = \frac{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i x_i - \overline{z}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \overline{x}^2} \text{ et } B = \overline{z} - A\cdot\overline{x}.$$

Comme $\overline{z} = \dfrac{1.6 + 2.64 + ... + 4.23}{9} = \dfrac{29.52}{9} = 3.28$, $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+....+10}{9} = \dfrac{46}{9} = 5.11$,
$\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i x_i = \dfrac{168.83}{9} = 18.76$ et $\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = \dfrac{304}{9} = 33.78$,
alors $A = \dfrac{2}{7.67} = 0.26$ et $B = 3.28 - 0.26 \times 5.11 = 1.95$.
Ainsi, l'équation de l'exponentielle est $\widehat{y} = ba^x$ avec $b = e^B = 7.03$ et $a = e^A = 1.3$.

■

Exercice 2

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	12	18	25	32	37	45	60	63

1. Ajuster ce nuage de points par la méthode des moindres carés.
2. Interpoler la valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 9$.

Solution :

On a

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	12	18	25	32	37	45	60	63

1. Déterminons l'équation de la droite de régression de y en x avec la méthode des moindres carrés. On a
$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i x_i - \overline{y}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \overline{x}^2} \text{ et } b = \overline{y} - a\cdot\overline{x}.$$
Comme $\overline{y} = \dfrac{5+12+...+63}{9} = \dfrac{297}{9} = 33$, $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+....+10}{9} = \dfrac{46}{9} = 5.11$,
$\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9} y_i x_i = \dfrac{1990}{9} = 221.11$ et $\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9} x_i^2 = \dfrac{304}{9} = 33.78$,
alors $a = \dfrac{52.48}{7.67} = 6.84$ et $b = 33 - 6.84 \times 5.11 = -1.95$.
Ainsi, l'équation de la droite de régression de y en x avec la méthode des moindres carrés est $y = 6.84x - 1.95$
2. La valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 9$ est $y = 6.84 \times 9 - 1.95 = 59.61$.

■

Exercice 3

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

a. Donner l'équation de la droite des moindres carrés ajustant ce nuage de points.

b. Interpoler la valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 15$.

Solution :

On a

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

1. Déterminons l'équation de la droite de régression de y en x avec la méthode des moindres carrés. On a
$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i x_i - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \overline{x}^2} \text{ et } b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$
Comme $\overline{y} = \dfrac{38 + 42 + ... + 201 + 292}{8} = \dfrac{960}{8} = 120,$
$\overline{x} = \dfrac{7 + 9 + 11 + ... + 18 + 20}{8} = \dfrac{108}{8} = 13.5,$
$\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8} y_i x_i = \dfrac{15563}{8} = 1945.38$ et $\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \dfrac{1596}{8} = 199.5,$
alors $a = \dfrac{325.38}{17.25} = 18.86$ et $b = 120 - 18.86 \times 13.5 = -134.61.$
Ainsi, l'équation de la droite de régression de y en x avec la méthode des moindres carrés est $y = 18.86x - 134.61.$

2. La valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 15$ est $y = 18.86 \times 15 - 134.61 = 148.29.$

■

Exercice 4

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

a. Ajuster ce nuage de points à une fonction puissance.

b. Interpoler la valeur de $\widehat{y}$ pour $x = 15$.

Solution :

a. Posons $u = \ln x$ et $v = \ln y$. On a

u	1.95	2.2	2.4	2.56	2.64	2.77	2.89	3.0
v	3.64	3.74	3.97	4.45	4.64	4.97	5.3	5.68

Déterminons l'équation de la droite de régression de v en u avec la méthode des moindres carrés. On a
$$v = Au + B \text{ avec } A = \frac{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} u_i v_i - \overline{u} \cdot \overline{v}}{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9} u_i^2 - \overline{u}^2} \text{ et } B = \overline{v} - A \cdot \overline{u}.$$
Comme $\overline{v} = \dfrac{3.64 + 3.74 + ... + 5.3 + 5.68}{8} = \dfrac{36.39}{8} = 5.55,$
$\overline{u} = \dfrac{1.95 + 2.2 + ... + 2.89 + 3.0}{8} = \dfrac{20.41}{8} = 2.55,$
$\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8} u_i v_i = \dfrac{94.62}{8} = 11.83$ et $\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8} u_i^2 = \dfrac{169.38}{8} = 21.17,$
alors $A = \dfrac{-2.32}{14.67} = -0.16$ et $B = 5.55 + 0.16 \times 2.55 = 5.96.$
Ainsi, l'équation de la droite de régression de v en u avec la méthode des moindres carrés est $v = -0.16u + 5.96.$
Donc, l'équation de la fonction puissance est donnée par :
$$\widehat{y} = e^{5.96} \times x^{-0.16}.$$

b. Pour $x = 15$ on a $\widehat{y} = e^{5.96} \times 15^{-0.16} = 251.32$.

■