Filière : **SMIA** 1

Module d'Algèbre 1 :

Chapitre I : Logique des Propositions et des Prédicats.

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Meknès - Morocco.

a.hammam@fs.umi.ac.ma

Toute remarque venant de votre part sera la bienvenue.

Si vous trouvez une erreur, merci de la signaler.

vous aurez un POINT de plus à l'examen.

Table des matières

Chapitre 1

Logique propositionnelle

1.1 Introduction

<u>Commençons par le Paradoxe suivant</u>

Soit P la phrase définie par

$$P \ : \quad \text{la phrase } P \ \text{ est fausse}$$

<u>Question</u> :

La phrase P est-elle réellement fausse ?

<u>Réponse</u> :

Si P est fausse, sa négation $\sim P$ devrait être vraie, mais

$$\sim P \ : \quad \text{la phrase } P \ \text{ est vraie !}$$

<u>Le Paradoxe du Boucher</u>

Dans un village, il y a un boucher qui, le jour de l'aid, égorge $\boxed{\textit{uniquement}}$ les moutons de ceux qui ne savent pas le faire par eux-mêmes.

<u>Question</u> :

A votre avis, qui égorge le mouton du boucher ?

<u>Réponse</u> :

Si c'est lui, alors ce n'est pas lui, et si ce n'est pas lui, alors c'est lui !

Afin d'éviter ce type d'aberration, les mathématiciens utilisent un langage très précis, où chaque mot est très bien défini, tout en respectant une certaine logique. Les phrases mathématiques ne sont pas floues : Elles sont soient Vraies, soit Fausses.

Au fait, que signifie faire des maths ?

Les mathématiciens ou les matheux sont censés découvrir de nouvelles vérités (théorèmes), à partir d'axiomes admis, de définitions choisies et d'anciens théorèmes selon le schéma suivant :

Axiomes $+$ définition 1 $\longrightarrow$ THEORème 1,

THEORème 1 $+$ définition 2 $\longrightarrow$ THEORème 2,

... etc

jusqu'à bâtir une certaine THEORie (des ensembles, des nombres, des catégories, ...).

Tout le problème consiste donc à mettre au point un moyen sûr : $\boxed{un \quad argument \quad Valide}$ qui permet d'énoncer une nouvelle vérité à partir de vérités déjà établies.

Mais, c'est quoi La LOGIQUE ?

La logique, c'est la science qui étudie la validité des arguments et la rigueur des démonstrations. Sans cette validité et cette rigueur, on ne sera jamais sûr de nos résultats.

Les trois principes de base de la logique binaire, sont dûs à Aristote (350 ans avant J.C !!!) :

Le principe d'identité : Chaque proposition est équivalente ou égale à elle même.

Le principe du tiers exclu : Une proposition est SOIT Vraie, SOIT Fausse.

Le principe de non contradiction : Une proposition ne peut pas être Vraie et Fausse à la fois.

A titre de comparaison, la logique quantique se passe des deux derniers principes. C'est à dire que la valeur de vérité d'une proposition quantique est une combinaison de "Vrai " et "Faux". En quelque sorte, elle peut être vraie et fausse à la fois (Le chat de Schrödinger est à la fois mort et vivant !).

Et C'est quoi une DEMONSTRATION ?

Une démonstration (ou preuve) est construite à partir d'un raisonnement LOGIQUE accompagné d'une séquence d'arguments VALIDES.

Un RAISONNEMENT ? c'est quoi ?

C'est la stratégie que l'on adopte pour répondre à la question qui nous est posée. Il nous indique le point de départ de la démonstration. En tout et pour tout, il y a environ une dizaine de raisonnements : Direct, par l'absurde, par disjonction des cas, par contre-exemple, pour conditionnel, , par contraposée, par équivalence, par analyse-synthèse, par récurrence, En partant d'une idée)

D'accord, mais C'est quoi alors un ARGUMENT ?

Un argument, c'est une liste de propositions de deux types : les hypothèses (ou les prémisses) et la conclusion.

Les hypothèses justifient, soutiennent, supportent, la conclusion .

La conclusion est une conséquence, déduite des prémisses.

En particulier, un argument avec DEUX hypothèses et UNE conclusion porte le nom de Syllogisme.

Finalement, C'est quoi une PROPOSITION ?

Une proposition, est un énoncé ou une phrase déclarative (qui a un sens) et surtout, à laquelle on peut attribuer une valeur de Vérité : On peut la qualifier de VRAIE ou de FAUSSE. On parle alors de logique binaire (V, F) ou $(1, 0)$.

Dans ce qui va suivre, de façon générale, les propositions seront notées par des lettres minuscules du type : p, q, r, s... et les prédicats par : P, Q, R, S...

Exemple 1. Soit E un ensemble et x un objet quelconque. $x \in E$ est alors une proposition.

Elle est vraie si x est un élément de E et fausse sinon.

En base 10, $1 + 7 = 8$ est une proposition vraie.
En base 6, $1 + 5 = 6$ est une proposition fausse.
En base 6, $1 + 5 = 10$ est une proposition vraie.

	C'est une proposition	Vraie ou Fausse
Bonjour	non	
Goooooooooool !	non	ça dépend du VAR
Dieu existe	oui	Vraie
Eteignez votre téléphone	non : c'est une recommandation	
Soyez serieux	non : suggestion	
Si le Maroc bat le Benin	non : antécédent d'un conditionnel	
Alors le Maroc sera qualifié	non : conséquent d'un conditionnel	
Si Dieu le veut, je réussirai	oui	vraie
$x^2 \geq 0$	C'est un prédicat à une variable	Cela dépend de x
$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x^2 \geq 0$	C'est une proposition	Vraie
$(\forall x \in \mathbb{C})\ \ x^2 \geq 0$	C'est une proposition	Fausse

Table 1.1 – Différence entre Proposition et Non Proposition

$x > 1$ n'est pas une proposition. Tant que l'on ne connaît pas la valeur du paramètre x, Nous sommes incapable de dire si $x > 1$ ou non. $x > 1$ est ce que l'on appelle un PREDICAT à une variable, que l'on note $P(x) : x > 1$.

Exemple 2. $\cos(x) = 1$ n'est pas non plus une proposition. Par contre,

$(\exists x \in \mathbb{R}) \ / \ \cos(x) = 1$ est bien une proposition qui est en plus vraie.

$Q : x + y = 2$ à son tour, n'est pas une proposition. C'est un prédicat à deux variables noté $Q(x, y)$.

On verra plus loin que l'on peut convertir un prédicat en une proposition (appelée aussi prédicat catégorique), à l'aide des Quantificateurs ($\forall$, $\exists$, $\exists!$).

1.2 Opérateurs ou Connecteurs Logiques

Partant de propositions données, nous pouvons construire de nouvelles propositions à l'aide d'opérateurs, unaire (tel la négation) ou binaire [du type disjonction (ou), conjonction (et), implication].

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

TABLE 1.2 – Table de vérité de la négation et de la double négation

A est ...	A n'est pas ...
f est croissante	f n'est pas croissante
(u_n) est convergente	(u_n) est divergente

TABLE 1.3 – Exemples de propositions et leurs négations

remarque 3. *L'ordre décroissant des priorités des connecteurs, est le suivant :*

$$\sim (\text{ non }), \ \wedge(\text{ et }), \ \vee(\text{ ou }), \ \text{ et en dernier } \Longrightarrow (\text{ implique. })$$

Pour éviter toute confusion, on pourra se servir des parenthèses. par exemple, on écrira

$$\Big((\sim p) \vee q\Big) \wedge (r \implies s).$$

A noter aussi que l'implication située à Gauche est prioritaire par rapport à celle de droite :

$$p \implies q \implies r \ \text{ doît se lire } : \ (p \implies q) \implies r$$

1.2.1 La négation d'une proposition

Par définition, si une proposition p est Vraie (resp. Fausse), sa négation notée $\sim p$, sera Fausse (resp. Vraie).(V. Table 1.2)

remarque 4. *On définit aussi la négation d'un Prédicat, étant donné le lien étroit entre prédicat et proposition.(V. Table* 1.4*)*

1.2.2 L'Equivalence logique de deux propositions

On dira que deux propositions p et q sont logiquement équivalentes ou que l'équivalence de p et q, notée $(p \equiv q)$, est vraie, si et seulement si, ces deux propositions ont exactement la même valeur de vérité.(V. Table 1.5)

$x < 8$	$x \geq 8$
$(x \geq 4)$ et $(y = 2)$	$(x < 4)$ ou $(y \neq 2)$
$\lvert x - a\rvert \leq \epsilon$	$\lvert x - a\rvert > \epsilon$

TABLE 1.4 – Exemples de Prédicats et leurs négations

$p \equiv q$	p	q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

TABLE 1.5 – Table de vérité de l'équivalence

remarque 5.

Règle de remplacement

Si p et q sont deux propositions équivalentes, Alors

1. *Pour montrer que p est vraie, il suffit de montrer que q est vraie.*
2. *Pour montrer que p est fausse, il suffit de montrer que q est fausse et vice versa.*

remarque 6. *Etant donné une proposition p, il est très facile de vérifier que*

$$\sim (\sim p) \text{ et } p \text{ ont exactement la même valeur de vérité}$$

On a alors

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

Exemple 7.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 + 1 = 5 \quad \equiv \quad x^2 = 4)$$

Si A et B sont deux ensembles, alors

$$A = B \quad \equiv \quad A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A$$

p	q	$p \vee q$	$p \vee \sim p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

TABLE 1.6 – Table de vérité de la disjonction inclusive

1.2.3 La Disjonction de deux propositions

Définition de la disjonction

Soient p et q deux propositions. Il s'agit de définir de façon précise, la proposition $r : p$ ou q. On conviendra que r est fausse si les deux propositions p et q sont fausses, et qu'elle est vraie dans les autres cas. On parle alors d'un " ou inclusif noté $\vee$." (V. Table 1.6)

Exemple 8.

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \quad \Big(n \text{ est un multiple de } 3 \quad \vee \quad n \text{ est un multiple de } 15\Big)$$

Il arrive aussi qu'on ait besoin du " ou exclusif " noté $\oplus$ défini par le fait que la proposition $p \oplus q$ n'est vraie que si UNE SEULE des deux propositions est vraie.(V. Table 1.7)

Exemple 9.

$$\frac{(x-1)(y-1)}{x-y} = 0 \ \equiv \ (x=1) \oplus (y=1)$$

remarque 10. *Comme l'on pouvait le prévoir d'après le deuxième principe d'Aristote, pour toute proposition p, la proposition $p \vee \sim p$ est TOUJOURS VRAIE.*
On dit que c'est une TAUTOLOGIE.

Propriétés de la disjonction

Les propriétés ci-dessous sont facilement vérifiables à l'aide des tables de vérité.

1. La commutativité
$$p \vee q \equiv q \vee p$$
2. L'associativité
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$$

remarque 11.

Argument ou syllogisme disjonctif

Il est à noter, d'après la table de vérité de la disjonction, que si $p \vee q$ est vraie et que p est fausse, alors OBLIGATOIREMENT, q est vraie.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Table 1.7 – Table de vérité de la disjonction EXclusive

Argument d'addition

Cette même table, permet d'affirmer que si p est vraie, alors OBLIGATOIREMENT, $p \vee q$ est vraie.

1.2.4 La Conjonction de deux propositions

Définition de la conjonction

Soient p et q deux propositions. Il s'agit de définir de façon précise, la proposition r : p et q. On conviendra que r est vraie si les deux propositions p et q sont vraies, et qu'elle est fausse dans les autres cas.(V. Table 1.8)

remarque 12. *Comme l'on pouvait le prévoir d'après le troisième principe d'Aristote, pour toute proposition p, la proposition $p \wedge \sim p$ est TOUJOURS FAUSSE.*
On dit que c'est une CONTRADICTION.

Propriétés de la conjonction

Les propriétés ci-dessous sont facilement vérifiables à l'aide des tables de vérité.

1. La commutativité
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
2. L'associativité
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$$
3. La distributivité de $\vee$ par raport à $\wedge$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
4. La distributivité de $\wedge$ par raport à $\vee$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \sim p$
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

TABLE 1.8 – Table de vérité de la conjonction

remarque 13.

Argument de la simplification

Il est à noter, d'après la table de vérité de la conjonction, que si $p \wedge q$ est vraie, alors OBLIGATOIREMENT, p est vraie.

On écrira

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

1.3 Notion d'Arguments

On appelle Argument, une séquence de propositions, dont le but est de défendre une idée ou un certain point de vue. Dans cette séquence, il y a deux types de propositions :

Les prémisses, (les données, les hypothèses, les conditions suffisantes, Input) : $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ et

La conclusion, (le résultat, le conséquent, la condition nécessaire, Output) : q.

Voici la structure générale d'un argument :

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

OU, si l'on pose $p = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 ... \wedge p_n$,

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

Le symbole $\therefore$ se traduit par : "Donc ".
Cette structure verticale est très pratique dans les démonstrations.
Un argument peut être interprété de deux façons :

$$\boxed{1^{\text{ère}}\text{lecture} \quad : \quad \text{Si } p \text{ Alors } q}$$

Cette façon de lire un argument se rencontre dans les énoncés d'une question : On parle aussi de CONDITIONNEL :

Montrer que si ... alors ...

ou dans l'énoncé d'un théorème :

Si on a ... alors on aura ...

$$\boxed{2^{\text{ème}}\text{lecture} \quad : \quad p \text{ Donc } q}$$

Cette lecture est surtout utile dans les démonstrations.

On a... Donc on a ...

On distingue deux grandes classes d'arguments :

Les arguments Inductifs : Ils se basent sur des données particulières (expérience, sondage, statistiques, ...) et se permettent d'énoncer des résultats généraux.

Les arguments Déductifs : Ils partent de résultats généraux et les appliquent à des cas spéciaux ou particuliers.

1.3.1 Argument Inductif

Il a la forme suivante :

$$\boxed{\text{Si } p \text{ Alors PROBABLEMENT } q}$$

Exemple 14. S'il neige sur Madrid, le classico sera probablement reporté.

Exemple 15.

Aristote est barbu

Platon est barbu

— — — — — — — — — — —

$\therefore$ Socrates est probablement barbu

Ce type d'argument est surtout utilisé en biologie, économie, politique, sociologie ...
Les mathématiciens se servent uniquement d'arguments déductifs qui garantiraient à 100% la véracité de leurs conclusions.

1.3.2 Argument Déductif

Il prend la forme suivante

$$\boxed{\text{Si } p \text{ Alors } q}$$

ou

$$\boxed{p \text{ Donc } q}$$

Mais le fait de le dire, ne suffit pas pour que la conclusion soit CERTAINEMENT vraie. Il faut que la déduction de q à partir de p, soit bien justifiée (par un axiome, une définition, un théorème , un lemme ou carrément démontrée).

D'où la notion de validité d'un argument, expliquée dans les sections à venir.

Exemple 16.

Tous les étudiants vont réussir

Je suis un étudiant

– – – – – – – – – – ––

$\therefore$ Je vais réussir

1.3.3 Argument Déductif Valide

Un argument déductif est dit VALIDE si et seulement si

$$\boxed{\text{La conclusion ne peut pas être fausse si toutes les prémisses sont vraies}}$$

OU

$$\boxed{\text{La conclusion est OBLIGATOIREMENT VRAIE si toutes les prémisses sont vraies}}$$

Exemple 17. Le premier exemple qui devrait venir à l'esprit est " Le théorème."

$$\boxed{\text{Un théorème est avant tout, un Argument Valide !!}}$$

Exemple 18. Soient p et q deux propositions. En examinant la table de vérité de la disjonction, on en déduit que si p est vraie, alors $p \vee q$ est forcément vraie. Ainsi, l'argument

p

————–

$\therefore \quad p \vee q$

est un argument déductif Logiquement Valide. On l'appelle l'argument de l'addition.

Exemple 19. Soient p et q deux propositions. En examinant la table de vérité de la conjonction, on en déduit que si $p \wedge q$ est vraie, alors p est forcément vraie. Ainsi, l'argument

$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

est un argument déductif Logiquement Valide. On l'appelle l'argument de la simplification.

1.3.4 Argument Déductif NON Valide

Un argument déductif est dit NON Valide si et seulement si

La conclusion peut être fausse même si toutes les prémisses sont vraies

OU

Le fait que toutes les prémisses soient vraies ne garantit pas que la conclusion est Vraie

Exemple 20. Soient p et q deux propositions. En examinant la table de vérité de la conjonction, on en déduit que le fait que p soit vraie, Ne garantit en rien que $p \wedge q$ soit forcément vraie. Ainsi, l'argument

$$\begin{array}{ll} & p \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

est donc NON Valide .

Il est clair que l'on n'écouterait pas quelqu'un qui affirme que

Si $1 = 1$, alors $1 = 1$ et $1 = 2$

ou qui dirait

$1 = 1$ donc $1 = 1$ et $1 = 2$.

1.3.5 Argument Déductif à écouter

Un argument déductif est dit écoutable ou à écouter (Sahih) si

1. Il est valide.
2. Toutes les prémisses sont vraies.

Par conséquent, un argument non valide ou un argument valide avec, au moins, une fausse prémisse n'est pas à écouter (hadith da3if).

Exemple 21. L'argument suivant

Tous les étudiants sont immortels

Je suis un étudiant

$- - - - - - - - - - - -$

$\therefore$ je suis immortel

est un argument VALIDE mais NON écoutable car la première prémisse est évidemment fausse!!

Exemple 22. L'argument suivant

Tous les Chinois mangent le riz

Il est Chinois

$- - - - - - - - - - - - - - - - -$

$\therefore$ Il mange le riz

est un argument écoutable!!
ou, en termes mathématiques, l'argument

Tous les nombres réels ont un carré positif

-2 est un nombre réel

$- - - - - - - - - - - - - - - - -$

$\therefore$ le carré de -2 est positif

est un argument Ecoutable!!

1.3.6 L'implication

C'est un connecteur essentiel en mathématiques, car c'est grâce à lui que les mathématiques avancent!
Il permet d'énoncer de nouvelles vérités .
Soient p et q deux propositions.
Lorsque l'on écrit $p \Longrightarrow q$, cela veut dire qu'il existe un argument déductif valide, dont p est la prémisse et q est la conclusion.
On peut aussi voir $p \Longrightarrow q$ comme un conditionnel qui se lirait :
Si p est vraie , alors q est vraie à 100000%.
Utilisée dans une démonstration, $p \Longrightarrow q$ veut dire, p est Vraie DONC (à 10000%) q est Vraie.
On pourrait ainsi remplacer $p \Longrightarrow q$ par la proposition $\sim p \vee q$.
On vérifie facilement que si $\sim p \vee q$ est vraie et que p est vraie, alors q est certainement vraie. Ceci nous permet de dresser la table de vérité de l'implication (V. Table 1.9).

p	q	p $\Longrightarrow$ q	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim q)$
1	1	Valide	1	0
1	0	Non valide	0	1

Table 1.9 – $p \implies q \equiv \sim p \vee q$

Récapitulons :

$$\boxed{(p \implies q) \ \equiv \ \sim p \vee q}$$

$$\boxed{(p \not\Rightarrow q) \ \equiv \ p \wedge \sim q}$$

$$\boxed{(p \implies q) \ \equiv \ \sim q \implies \sim q}$$

remarque 23. *On dira que les deux propositions p et q sont matériellemnt équivalentes si et seulement si*

$$(p \quad \implies \quad q) \quad \wedge \quad (q \quad \implies \quad p)$$

On écrira alors

$$p \quad \Longleftrightarrow \quad q$$

1.3.7 Comment montrer qu'un argument est valide ?

Pour montrer qu'un argument est valide, il faut vérifier que lorsque les prémisses sont vraies,

la conclusion ne peut, en aucun cas, être fausse.

Utilisation de la table de vérité réduite

Si l'argument ne contient pas trop de propositions ($\leq$ 3), On peut vérifier sa validité en passant par la table de vérité Réduite, c'est à dire qui ne fait apparaître que les lignes correspondant aux cas où toutes les prémisses sont Vraies. Les autres lignes étant inutiles.

Si le nombre de propositions est relativement élevé ($\geq$ 4), On utilise une preuve formelle que l'on verra ultérieurement.

Des exemples sont donnés dans les sections suivantes.

1.3.8 Comment montrer qu'un argument N'est pas valide ?

Toujours avec l'aide de la table de vérité , On cherche s'il y a des lignes qui correspondent à des situations (Appelées critiques) où les prémisses sont Vraies et où la conclusion est Fausse ! ! !

p	q	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \wedge q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

TABLE 1.10 – Non validité de l'argument $(\sim p \vee q) \wedge q \implies p$

Exemple 24. Assurons nous que l'argument

$$\sim p \ \wedge \ q$$

$$q$$

$$- - - - - - - -$$

$$\therefore \ p$$

est Non Valide.

A titre d'exercice, Préciser la ligne critique sur la table de vérité (V. table 1.10)!!

1.4 Raisonnement et preuves formelles

Cette section constitue le but essentiel du cours sur la logique. En effet,

Faire des mathématiques, c'est énoncer des vérités (Lemmes, Théorèmes, Corollaires).

Pour cela, il faut les argumenter, les justifier , les prouver, c'est à dire, les démontrer.

Pour les démontrer, il faut se servir d'arguments VALIDES car les arguments NON Valides ne permettent pas de conclure quoi que ce soit.

La logique est là pour vérifier la VALIDITE d'un argument.

<u>En résumé</u>

Prémisses VRAIES + Argument Valide $\longrightarrow$ Conclusion VRAIE.

Prémisses VRAIES + Argument NON Valide $\longrightarrow$????? .

Prémisse FAUSSE + Argument Valide $\longrightarrow$????? .

Prémisse FAUSSE + Argument NON Valide $\longrightarrow$?????.

Conclusion FAUSSE et Argument Valide $\longrightarrow$ Premisse Fausse!!

Ceci montre que le seul moyen d'avancer de façon sûre, c'est de partir d'une proposition vraie et d'utiliser un argument Valide, pour être certain que la conclusion est Vraie.

C'est cette validité des arguments, qui différencie les mathématiques des autres sciences aussi exactes soient-elles !

1.4.1 Raisonnement

1^{er} cas : Pour montrer que la proposition $\boxed{p}$ est vraie

---

$$
\begin{array}{c}
N(\text{condition Nécessaire}) \\
\Uparrow \\
T\ (\text{Théorème}) \iff \boxed{p} \iff D\ (\ \text{Définition}\ ) \\
\Uparrow \\
S\ (\text{condition Suffisante})
\end{array}
$$

Supposons que l'on veuille prouver ou montrer que la proposition p est vraie. Le raisonnement sert à choisir la technique ou la stratégie à adopter. On pourrait par exemple montrer directement que p est vraie. On pourrait aussi raisonner par l'absurde en supposant que p est fausse. On pourrait tout aussi montrer que T ou D est vraie si l'on sait que p , T et D sont équivalentes. On peut enfin, prouver que S (la condition suffisante)est vraie si l'on sait que $S \implies p$ c'est à dire que S est une condition suffisante pour p.

Par contre, pour montrer que p est Fausse, soit on le fait directement, soit on montre que D ou T est fausse ou bien que N (condition nécessaire) est fausse.

$2^{\text{ème}}$ cas : Pour montrer que le conditionnel $\boxed{p \implies q}$ est vrai

---

$$
\begin{array}{c}
\sim q \implies \sim p\ (\ \text{contraposée}\ ) \iff \boxed{p \implies q} \iff \sim p \vee q\ (\ \text{définition matérielle}) \\
\Uparrow \\
(p \implies r) \wedge (r \implies q)\ (\text{condition Suffisante})
\end{array}
$$

Si maintenant, on voudrait montrer que l'implication $p \implies q$ est vraie. On pourrait choisir de raisonner directement en supposant que p est vraie et montrer alors que q l'est aussi. Sinon, on pourrait utiliser la contraposée et plutôt montrer que $\sim q \implies \sim p$.

Pour montrer que ce conditionnel n'est pas valide, il faut montrer que la proposition $p \wedge \sim q$ est vraie.

1.4.2 Raisonnement par l'absurde : découvrir une contradiction

Ce type de raisonnement est basé sur le fait que si la CONCLUSION d'un argument VALIDE est FAUSSE, Cela veut tout simplement dire que l'hypothèse de cet argument est FAUSSE.

En particulier, Si la conclusion d'un argument valide est une CONTRADICTION, alors l'hypothèse de l'argument est obligatoirement FAUSSE.

Exemple 25. Montrons, en utilisant ce type de raisonnement que l'argument

$$p \implies q$$

$$- - - - - - - -$$

$$\therefore \ (\sim p) \ \vee \ q$$

est Valide.

1. $p \implies q$, prémisse
2. $\sim (\sim p \vee q)$, Hypothèse du raisonnement par l'absurde
3. $p \wedge (\sim q)$, Loi de De Morgan,2
4. p, Simplification 3
5. $\sim q$, Simplification 3
6. q, Modus Ponens $1, 4$
7. $(\sim q) \wedge q$, conjonction $5, 6$
8. $\sim p \vee q$, preuve par l'absurde.

1.4.3 Raisonnement par disjonction des cas : Examiner tous les cas possibles

Exemple 26. Montrons, en utilisant ce type de raisonnement que l'argument

$$p \implies q$$

$$- - - - - - - -$$

$$\therefore \ (\sim p) \vee q$$

est Valide.

1. $p \implies q$, prémisse

2. p, premier cas du raisonnement par disjonction des cas
3. q, Modus ponens $1, 2$
4. $\sim p \vee q$, addition 3

5. $\sim p$, deuxième cas
6. $\sim p \vee q$, addition 5
7. $\sim p \vee q$, preuve par disjonction des cas.

1.4.4 Preuves ou Démonstrations Rigoureuses

Une preuve ou une démonstration correcte, c'est une paire constituée d'un raisonnement basé sur la logique et d'une suite ou séquence d'arguments VALIDES, qui mènent, de façon sûre et certaine, à la conclusion désirée . Le point de départ d'une démonstration est fixé ou déterminé par le type de raisonnement choisi.

Exemple 27. Montrons que le syllogisme hypothétique suivant :

$$p \implies q$$

$$q \implies r$$

$$-----------$$

$$\therefore \quad p \implies r$$

est bien Valide

Il s'agit de montrer que si $p \implies q$ et $q \implies r$, alors Forcément $p \implies r$.

Les prémisses sont $p \implies q$ et $q \implies r$.

La conclusion à montrer est le conditionnel $p \implies r$.

1$^{\text{er}}$raisonnement : (conditionnel direct)

On suppose p et l'on montre r.

1. $p \implies q$, prémisse
2. $q \implies r$, prémisse
3. p, hypothèse pour le conditionnel $p \implies r$
4. q, Modus ponens $1, 3$
5. r, Modus ponens $2, 4$
6. $p \implies r$, preuve dn conditionnel $3 - 5$

2$^{\text{ème}}$raisonnement : (conditionnel indirect ou par l'absurde)

On suppose p et pour montrer q, on raisonnera par l'absurde, c'est à dire que l'on supposera $\sim q$.

Si l'on aboutit à une contradiction, cela voudrait que q est vraie et par conséquent que si p alors q.

3$^{\text{ème}}$raisonnement (Utilisation d'un remplacement)

Au lieu de montrer que l'implication $p \implies q$ est vraie (ou valide), on montrera plutôt que la proposition (qui lui est équivalente) $\sim p \vee q$ est vraie.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1

Table 1.11 – Table réduite de l'argument de simplification

$4^{\text{ème}}$raisonnement (Utilisation de la contraposée)

Au lieu de montrer que l'implication $p \implies q$ est vraie (ou valide), on montrera plutôt que la proposition (qui lui est équivalente) $\sim q \implies \sim p$ est vraie.

1.5 Les Arguments Valides Triviaux et élémentaires

1.5.1 Argument valide de la Simplification

$$\begin{array}{l} \quad p \wedge q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

Vérifions que cet argument est bien valide, à l'aide de la table de vérité réduite

D'après cette table, on voit que si la conjonction $p \wedge q$ est vraie, alors, on est sûr et certain que la proposition p ne peut pas être fausse.

1.5.2 Argument valide de la Conjonction

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \quad q \\ \hline \therefore \quad p \wedge q \end{array}$$

La validité découle directement de la définition de la conjonction.

1.5.3 Argument valide de l'Addition

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \hline \therefore \quad p \vee q \end{array}$$

Vérifions que cet argument est bien valide, à l'aide de la table de vérité réduite.

D'après cette table, on voit que si la proposition p, alors, on est sûr et certain que la proposition $p \vee q$ ne peut pas être fausse.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1

Table 1.12 – Table réduite de l'argument de l'addition

1.6 Les Arguments valides Naturels et artificiels

1.6.1 Le départ : Modus Ponens ou Elimination de l'implication

$$p \implies q$$
$$p$$
$$-------------$$
$$\therefore \quad q$$

Qui se lit
Si ($p \implies q$) est vraie, et que p est vraie, Alors (à 100%) q est vraie.
Que l'on peut aussi écrire sous la forme tautologique :

$$\boxed{(p \implies q) \wedge q \implies q}$$

Cet argument découle naturellement du fait que l'implication $\implies$ est elle même, en quelque sorte ,
un argument valide !

1.6.2 Syllogisme Disjonctif ou Reniement de l'antécédent

Un syllogisme est tout simplement un argument constitué de DEUX prémisses est une conclusion.
Le syllogisme disjonctif possède la forme suivante :

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\therefore \quad q$$

Qui se lit
$p \vee q$ et $\sim p$ donc q.
Que l'on peut aussi écrire sous la forme tautologique suivante :

$$\boxed{(p \vee q) \ \wedge \ \sim p \implies q}$$

remarque 28. *Cet argument peut être obtenu directement à partir de l'argument Modus Ponens, en remplaçant $p \implies q$ par son équivalent matériel $\sim p \vee q$.*

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
0	1	1	1

TABLE 1.13 – Table réduite pour montrer la Validité du Syllogisme disjonctif

$$\begin{array}{c} \sim p \vee q \\ p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

Vérifions la validité du Syllogisme disjonctif en utilisant la table de vérité "réduite" (table 1.13) : On ne considère que les lignes de la table ci-dessus, qui correspondent au cas où toutes les prémisses

$p \vee q$ et $\sim p$ sont vraies. On s'assure que dans ce cas, la conclusion est nécessairement, obligatoirement , forcément, certainement vraie ou qu'il est impossible que la conclusion soit fausse.

1.6.3 Syllogisme Hypothétique

Cet argument traduit tout simplement la transitivité de l'implication.

$$\begin{array}{c} p \implies q \\ q \implies r \\ \hline \therefore \quad p \implies r \end{array}$$

1.6.4 Arguments valides Artificiels

En plus des arguments valides qui découlent de l'intuition (Modus Ponens), ou de la logique (Syllogisme disjonctif),

On dispose d'autres arguments valides qui proviennent

1. Des axiomes
   Euclide, Péano, ZFC,...
2. Des définitions
   Croissante, continue, ...
3. Des lemmes
   Jordan, Abel,...
4. Des théorèmes
   Rolle, Bezout, accroissements finis ...
5. Des règles de calcul
   commutativité, associativité, distributivité,...

6. Des formules
   Moivre, dérivation, trigonométriques,...

C'est en agençant correctement ces différents arguments valides (naturels ou artificiels), en profitant, entre autres, de la transitivité de l'implication, que l'on bâtit une démonstration rigoureuse qui permet d'énoncer une nouvelle Vérité !

1.7 Règles de Remplacement

Il s'agit de Remplacer une proposition p par une autre qui lui est logiquement ou matériellement équivalente.

Par exemple, pour montrer que, $p \implies q$, il suffit de montrer $\sim p \vee q$ puisque les deux propositions sont équivalentes.

On pourrait par exemple remplacer, grâce aux lois de De Morgan, la proposition $\sim (p \vee q)$ par $\sim p \wedge \sim q$ ... etc.

1.7.1 Règle de remplacement de la Double négation

$$\sim (\sim p) \quad \equiv \quad p$$

1.7.2 Règle de remplacement de De Morgan

Les lois ou formules de De Morgan, que l'on démontre à l'aide des tables de vérité, donnent les négations

de la conjonction :

$$\sim (p \wedge q) \quad \equiv \quad \sim p \vee \sim q$$

Et de la disjonction :

$$\sim (p \vee q) \quad \equiv \quad \sim p \wedge \sim q$$

1.7.3 Règle de remplacement de l'Implication Matérielle

$$p \implies q \quad \equiv \quad (\sim p) \vee q$$

1.7.4 Règle de remplacement de la contraposition

$$\Big(p \implies q \Big) \quad \equiv \quad \Big(\sim q \implies \sim p \Big)$$

Cette règle est une conséquence du fait que

$$(p \implies q) \quad \equiv \quad \sim p \vee q \quad \equiv \quad \sim (\sim q) \vee \sim p \quad \equiv \quad (\sim q \implies \sim p)$$

1.7.5 Règle de remplacement de l'Equivalence Matérielle 1

$$p \iff q \;\equiv\; (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

1.7.6 Règle de remplacement de l'Equivalence Matérielle 2

$$p \iff q \;\equiv\; (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

1.8 Autres arguments et preuve de leurs validités

1.8.1 Modus Tollens ou Reniement du conséquent

Il a la structure suivante :

$$p \implies q$$
$$\sim q$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$\therefore \quad \sim p$$

Ce valide argument est obtenu à partir de l'argument Modus Ponens, en remplaçant $p \implies q$ par son équivalent matériel $\sim (\sim q) \vee \sim p$, puis en appliquant le syllogisme disjonctif.

$$\sim (\sim q) \vee \sim p$$
$$(\sim q)$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$\therefore \quad \sim p$$

1.8.2 Argument de la composition

$$p \implies q$$
$$p \implies r$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$\therefore \quad p \implies q \wedge r$$

<u>Démonstration</u>

1. $p \implies q$, prémisse
2. $p \implies r$, prémisse
3. $\quad p$, hypothèse pour le conditionnel $p \implies q \wedge r$
4. $\quad q$, Modus ponens $1, 3$

5. $\quad r$, Modus ponens $2, 3$
6. $\quad q \wedge r$, conjonction $4, 5$
7. $p \implies q \wedge r$, preuve dn conditionnel $3 - 6$

1.8.3 Argument du Dilemme constructif

$$p \implies q$$

$$r \implies s$$

$$p \vee r$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\therefore \quad q \vee s$$

Démonstration

1. $p \implies q$, prémisse
2. $r \implies s$, prémisse
3. $p \vee r$, prémisse

4. $\quad q$, premier cas du raisonnement par disjonction des cas
5. $\quad q \vee s$, Addition 4

6. $\quad \sim q$, deuxième cas
7. $\quad \sim p$, Modus tollens $1, 6$
8. $\quad r$, Syllogisme disjonctif $3, 7$
9. $\quad s$, Modus ponens $2, 8$
10. $\quad s \vee q$, Addition 9
11. $\quad q \vee s$, Commutativité 10
12. $q \vee s$.

1.8.4 Argument du Dilemme destructif

$$p \implies q$$

$$r \implies s$$

$$\sim q \vee \sim s$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\therefore \quad \sim p \vee \ \sim r$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

1.8.5 Argument de l'Import

$$p \implies (q \implies r)$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\therefore \quad (p \wedge q) \implies r$$

<u>Démonstration</u>

1. $p \implies (q \implies r)$, prémisse
2. $p \wedge q$, hypothèse pour le conditionnel $(p \wedge q) \implies r$
4. p, Simplification 2
5. q, Simplification 2
6. $q \implies r$, Modus Ponens $1, 4$
7. r, Modus Ponens $5, 6$
8. $(p \wedge q) \implies r$, preuve du conditionnel $2 - 7$

1.8.6 Argument de l'Export

$$(p \wedge q) \implies r$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\therefore \quad p \implies (q \implies r)$$

<u>Démonstration</u>

1. $(p \wedge q) \implies r$, prémisse
2. p, hypothèse pour le conditionnel $p \implies (q \implies r)$
4. q, hypothèse pour le conditionnel $q \implies r$
5. $p \wedge q$, Conjonction $2, 4$
6. r, Modus Ponens $1, 5$
7. $q \implies r$ preuve du conditionnel $q \implies r$, $4 - 6$
8. $p \implies (q \implies r)$ preuve du conditionnel $p \implies (q \implies r)$, $2 - 7$

Chapitre 2

Logique des Prédicats et quantificateurs

Le but de cette section est de se familiariser avec les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$ afin de bien comprendre et assimiler les notions que vous aurez l'occasion de voir tout au long de votre cursus universitaire !.
D'autre part, cette section permet d'opérer une transition entre les notions de logique et le langage de la théorie des ensembles que l'on développera dans le prochain chapitre.

Exemple 29. 1. Si G est un ensemble muni de la loi $*$, alors

$$e \text{ est l'élément neutre de } (G,*) \iff$$

$$(\forall x \in G) \quad x * e = e * x = x$$

2. Si A est une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$, alors

$$A \text{ est bornéee} \iff (\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2) \ : \ (\forall x \in A) \quad m \ \leq \ x \ \leq M$$

$$\iff (\exists M \in \mathbb{R}^+) \ : \ (\forall x \in A) \ \ |\, x \,| \ \leq M$$

3.

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff$$

$$(\forall V \in \mathcal{V}(\ f(x_0)\ ))\ \ (\exists U \in \mathcal{V}(x_0)) \ : \ f(U \cap D) \subset V$$

4.

$$f \text{ est Uniformément continue sur } A \iff$$

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ (\forall (x,y) \in A^2)\ \ \Big(|x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\Big).$$

2.1 Notion de prédicat

2.1.1 Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle prédicat à une seule variable x sur E, tout énoncé qui dépend du paramètre x et qui devient une proposition, une fois que x est bien défini ou au moins quantifié. Ce prédicat sera noté $P(x)$.

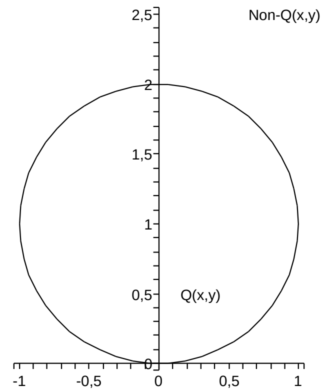

FIGURE 2.1 – La représentation géométrique du prédicat $Q(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 1$

Exemple 30.

$$E = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P(x) \quad : \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

Si $x = 2$ ou $x = 3$ alors $P(x)$ est une proposition vraie.
Si $x = 4$, $P(x)$ est une proposition fausse.

De même, on appelle prédicat à deux variables x et y appartenant au produit cartésien $E \times F$, tout énoncé faisant intervenir les deux paramètres x et y, et qui devient une proposition, si l'on fixe les valeurs de x dans E et de y dans F.
Ce prédicat sera noté, par exemple, $Q(x, y)$.

Exemple 31.

$$E = F = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Q(x, y) \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Si $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}$ alors $Q(x, y)$ est une proposition vraie.
Si $x = 4$ et $y = 1$, $Q(x, y)$ est une proposition fausse.
Il n'est pas mauvais de signaler que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ représente le disque ouvert de centre $(0, 1)$ et de rayon 1 (V. figure 2.1).

remarque 32. *Vous imaginez facilement, ce qu'est un prédicat à trois ou plusieurs variables.*

2.1.2 Comment transformer un prédicat en proposition ?

Prenons, pour simplifier, le cas d'un prédicat à une seule variable $P(x)$.
Pour que $P(x)$ soit une proposition, c'est à dire une affirmation vraie ou fausse, il faut soit fixer la valeur de la variable x , soit rendre ce prédicat catégorique, à l'aide des quantificateurs universel $\forall$ ou existentiel $\exists$

Exemple 33. Pour tout élément x de l'ensemble E, $P(x)$ est vraie s'écrit

$$(\forall x \in E) \quad P(x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0 \text{ est une proposition Vraie}$$

$$(\forall x \in \mathbb{C}) \quad x^2 \geq 0 \text{ est une proposition fausse}$$

Exemple 34. $P(x)$ est vraie pour, au moins, un élément a de E se traduit par

$$(\exists a \in E) \quad : \quad P(a)$$

Qui se lit : Il existe au moins un élément a de E TEL QUE $P(a)$ soit vraie.

$$(\exists a \in \mathbb{Z}) \quad : \quad a^4 = 16 \text{ est une proposition vraie}(a = -2)$$

$$(\exists a \in \mathbb{Z}) \quad : \quad a^4 = \pi \text{ est une proposition fausse}$$

Exemple 35. $P(x)$ est vraie pour UN ET UN SEUL élément b de E se traduit par

$$(\exists\, !\, b \in E) \quad : \quad P(b)$$

Qui se lit : Il existe un et un seul élément b de E TEL QUE $P(b)$ soit vraie.

$$(\exists\, !\, b \in \mathbb{N}) \quad : \quad b - 2 = 1 \quad \text{est vraie } (b = 3)$$

$$(\exists\, !\, b \in \mathbb{N}) \quad : \quad (b-1)(b-2) = 0 \text{ est fausse}$$

2.1.3 Négation d'un prédicat catégorique

★ La négation de

$$(\forall x \in E) \quad P(x)$$

est donnée par

$$(\exists x \in E) \quad \sim P(x)$$

★ La négation de

$$(\exists x \in E) \quad P(x)$$

est donnée par

$$(\forall x \in E) \quad \sim P(x)$$

<u>A titre d'exercice, quelle est la négation de la proposition</u>

$$(\exists\, !\, x \in E) \quad : \quad P(x)$$

★ La négation de

$$(\forall x \in E) \quad (P(x) \implies Q(x))$$

est donnée par

$$(\exists x \in E) \quad P(x) \wedge (\sim Q(x))$$

Quelques exemples avec des prédicats à plusieurs variables

★ La négation de

$$(\forall x \in E) \quad (\exists y \in F) \ : \ Q(x,y)$$

est donnée par

$$(\exists x \in E) \ : \ (\forall y \in F) \quad \sim Q(x,y)$$

★ La négation de

$$(\exists a \in A) \ : \ (\forall b \in B) \quad R(a,b)$$

est donnée par

$$(\forall a \in A) \quad (\exists b \in B) \ : \ \sim R(a,b)$$

★ La négation de

$$(\exists a \in A) \ : \ (\forall b \in B) \ (P(a,b) \implies Q(a,b))$$

est donnée par

$$(\forall a \in A) \quad (\exists b \in B) \ : \ P(a,b) \ \wedge \ \sim Q(a,b)$$

2.2 Arguments avec prédicats

Nous avons vu comment écrire un argument avec des propositions (prémisses + conclusion) et comment transformer un prédicat en une proposition à l'aide des quantificateurs.

Il est donc possible d'écrire un argument avec des prédicats.

L'exemple le plus classique a la forme suivante :

Tous les êtres vivants sont mortels

Je suis un être vivant

―――――――――――――

$\therefore$ je suis mortel

qui se traduit aussi, en langage de la théorie des ensemble, par

$$\begin{array}{c}(\forall x \in \mathcal{V}) \quad x \in \mathcal{M} \\ j \in \mathcal{V} \\ \hline \therefore \quad j \in \mathcal{M}\end{array}$$

Pour démontrer la validité de ce type d'argument, on se sert de ce qu'on appelle " Les diagrammes de Venn".

Exemple 36.

$$\begin{array}{c}\text{Toutes les fonctions dérivables sur } [a,b] \text{ sont continues sur } [a,b] \\ f \text{ est une fonction dérivable sur } [a,b] \\ \hline \therefore \quad f \text{ est continue sur } [a,b]\end{array}$$

Exemple 37.

$$\begin{array}{c}\text{Tous les groupes possèdent un élément neutre} \\ (G,*) \text{ est un groupe} \\ \hline \therefore \quad (G,*) \text{ possède un élément neutre}\end{array}$$

2.2.1 Le Modus Ponens Universel

$$\begin{array}{c}(\forall x \in \mathcal{U}) \quad \big(x \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathcal{M}\big) \\ j \in \mathcal{V} \\ \hline \therefore \quad j \in \mathcal{M}\end{array}$$

Qui s'écrit en langage ensembliste

$$\begin{array}{c}\mathcal{V} \subset \mathcal{M} \\ j \in \mathcal{V} \\ \hline \therefore \quad j \in \mathcal{M}\end{array}$$

remarque 38. *C'est cette dernière formulation qui justifie l'utilisation des diagrammes de Venn (V. Figure 2.2), pour vérifier la validité des arguments écrits en termes de prédicats.*

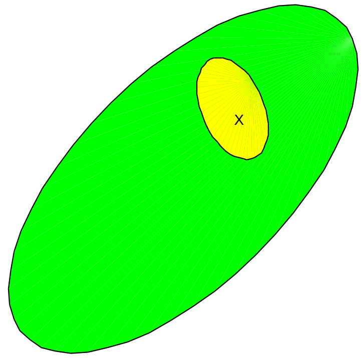

FIGURE 2.2 – Le Diagramme de Venn de l'argument valide : Modus Ponens

2.2.2 Version ensembliste du Syllogisme disjonctif (VALIDE)

$$\exists\, x \in \mathcal{V} \cup \mathcal{M}$$

$$x \notin \mathcal{V}$$

$$\therefore \quad x \in \mathcal{M}$$

2.2.3 Version ensembliste du Syllogisme hypothétique (VALIDE)

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$$

$$\therefore \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$$

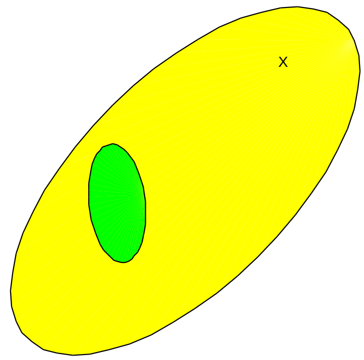

Figure 2.3 – Le Diagramme de Venn d'un argument NON valide de l'exemple 39

2.2.4 Argument NON Valide avec prédicat

Exemple 39. Cet exemple d'argument non valide est représenté par la figure 2.3 .

$$\begin{array}{c}\text{Tous les carrés des entiers sont positifs}\\ a \text{ est un entier positif}\\ \hline \therefore \quad \text{a est un carré}\end{array}$$

Que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$\begin{array}{c}(\forall x \in \mathcal{U}) \quad \Big(x \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 0\Big)\\ a \in \mathcal{U}\\ a \geq 0\\ \hline \therefore \quad a \text{ est un carré}\end{array}$$

Exemple 40. Cet exemple d'argument non valide est représenté par la figure 2.4.

$$\begin{array}{c}\text{Il existe des réels inférieurs à } -1\\ \text{Il existe des réels supérieurs à } 1\\ \hline \therefore \quad \text{Il existe des réels inférieurs à } -1 \text{ et supérieurs à } 1\end{array}$$

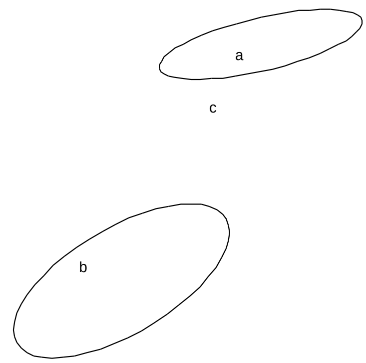

FIGURE 2.4 – Le Diagramme de Venn de l'argument NON valide de l'exemple 40

Qui se traduit, dans le langage de la théorie des ensembles, par

$$\exists \ a \in A$$
$$\exists \ b \in B$$

$$\therefore \quad \exists \ c \in A \cap B$$

Remarquer que La conclusion n'est évidemment pas toujours vraie. Par contre,

$\boxed{\text{Pour être récompensé par Dieu et seulement par Dieu, Il faut fournir un effort.}}$

C'est Logique .

Fin.