Filière : SMIA 1

Module d'Algèbre 1 :

Langage de la Théorie des Ensembles

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Meknès - Morocco.

a.hammam@fs.umi.ac.ma

Toute remarque venant de votre part sera la bienvenue.

Si vous trouvez une erreur, merci de la signaler.

vous aurez un POINT de plus à l'examen.

Table des matières

1 Logique des Propositions et des Prédicats **7**
1.1 Voir le polycopié correspondant 7

2 Théorie des Ensembles (ZFC) **9**
2.1 Introduction 9
2.2 Interaction Elément-Ensemble 14
2.2.1 Appartenance $\in$ 14
2.2.2 Non-appartenance $\notin$ 15
2.3 Interaction Ensemble-Ensemble 15
2.3.1 Inclusion $\subset$ 15
2.3.2 Egalité de deux ensembles 16
2.3.3 Réunion $\cup$ 17
2.3.4 Intersection $\cap$ 17
2.3.5 Propriétés de la réunion et de l'intersection 18
2.3.6 Différence $\setminus$ 18
2.3.7 Complémentaire $\complement$ 19
2.3.8 Différence symétrique Δ 19
2.3.9 Produit Cartésien $\times$ 20
2.3.10 Recouvrement et Partition d'un ensemble E. 20
2.4 Interaction Elément-Elément d'un même ensemble E. 20
2.4.1 Loi de composition interne 21
2.4.2 Loi de composition interne commutative 21
2.4.3 Loi de composition interne associative 22
2.4.4 Elément Neutre d'une loi 22
2.4.5 Symétrique d'un élément 23
2.4.6 Notion de Groupe 23
2.4.7 Notion de Relation Binaire 24
2.4.8 Compatibilité d'une relation binaire avec une loi de composition interne 25
2.4.9 Relation d'équivalence 25
2.4.10 Classe d'équivalence 26
2.4.11 Relation d'ordre 27
2.4.12 Minorant et Majorant d'un ensemble 28
2.4.13 Borne Inférieure et Borne Supérieure 28
2.4.14 plus Grand et plus Petit Element 29
2.5 Interaction Elément d'un ensemble E - Elément d'un autre Ensemble F. . . . 30

2.5.1 Notion d'application 30
2.5.2 Restriction d'une Application 31
2.5.3 Prolongement d'une fonction 31
2.5.4 Application Injective 31
2.5.5 Application Surjective 32
2.5.6 Application Bijective 32
2.5.7 Application Inverse d'une Bijection 33
2.5.8 Comment montrer qu'une Application est Injective, Surjective, Bijective ou NON ... 33
2.5.9 Fonction Composée 34
2.6 Interaction Ensemble-Application 35
2.6.1 Image directe d'un ensemble par une application 36
2.6.2 Quelques propriétés de l'Image directe 36
2.6.3 Image Réciproque d'un ensemble par une application 39
2.6.4 Quelques propriétés de l'Image réciproque 39

Chapitre 1

Logique des Propositions et des Prédicats

1.1 Voir le polycopié correspondant

Chapitre 2

Théorie des Ensembles (ZFC)

2.1 Introduction

Commençons par le Paradoxe suivant, bien connu sous le nom de " paradoxe de Russel " :

Il s'agit de considérer l'objet A défini par

$$A = \{X \ : \ X \notin X\} \text{ ou de façon équivalente } \quad (\forall X) \quad \Big(X \in A \quad \Longleftrightarrow \quad X \notin X\Big)$$

Cette définition conduit à l'aberration (contradiction) suivante :

$$A \in A \quad \Longleftrightarrow \quad A \notin A$$

Pour éviter ce genre de contradiction, il ne faudra pas écrire des choses Vagues qui ne sont pas claires.

La théorie des ensembles, qui porte le nom de théorie ZFC (Zermelo $+$ Fraenkel $+$ axiome du Choix) est, de nos jours, très bien acceptée et adoptée par la grande majorité des mathématiciens !

Elle leur offre un Langage Adéquat qui leur permet de s'émanciper et d'exercer convenablement leur métier.

Pour rester dans le cadre du programme, Notre but n'est pas de scruter les points forts et les points faibles de la théorie(consistance, décidabilité, ...) , en tant que théorie axiomatique, Mais uniquement de profiter de son langage afin de construire des <u>propositions</u>, puis des <u>arguments</u>, ensuite des <u>démonstrations</u> et en fin " énoncer des <u>théorèmes</u> " c'est à dire des vérités mathématiques qui resteront vraies jusqu'à la fin des temps.

Observons tranquillement les écritures suivantes :

$$a \quad \notin \quad a \quad \in \quad \{a\} \quad \in \quad \{\ a, \{a\}\ \},$$

et

$$a \quad = \quad a \quad \in \quad \{a\} \quad \subset \quad \{\ a, \{a\}\}$$

On voit, entre autres, qu'un élément ($\{a\}$ par exemple), peut être vu comme un ensemble et qu'un ensemble, à son tour, peut très bien se comporter comme un élément !.

On parlera de façon très générale d'OBJET de la théorie des ensembles.
En gros, La théorie ZFC est construite à partir des 7 axiomes suivants :

Axiome 1 de départ ou Principe de base :

Nous admettrons qu'il existe des objets (réels et concrets ou imaginaires et abstraits ou qui dépassent notre imagination) qui font partie d'un univers $\mathcal{U}$.
L'univers $\mathcal{U}$ pourrait dépendre du contexte. En ce sens qu'il peut prendre plusieurs formes. On parle alors d'espace dans lequel on se situe.
Si l'on étudie les suites réelles, alors $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si l'on s'intéresse aux fonctions continues, $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ... etc.
On admet aussi qu'il est possible de regrouper ces objets , pour former des collections appelées "ENSEMBLES" . Les objets qui constituent ces ensembles sont appélés "ELEMENTS" .
En général, les éléments sont représentés par des lettres minuscules $(a, b, c, x, y, ...)$ tandis que les ensembles, qui pourraient les contenir, sont plûtot dénotés par des lettres majuscules $(E, F, G, A, ...)$.
Si l'objet a se trouve dans la collection E, On dira que l'élément a APPARTIENT à L'ENSEMBLE E, et l'on écrira

$$a \in A$$

Sinon, on traduira cette non appartenance, par

$$a \notin A$$

A noter qu'il n'est pas question ou qu'il est insensé d'écrire $A \in A$. Par contre, il est toujours vrai d'écrire $A \notin A$ pour n'importe quel objet de la théorie.

remarque 1. *Si a et E sont deux objets de la théorie, alors $a \in E$ est une Proposition.*

$$\boxed{\textit{La relation d'appartenance notée} \quad \in \quad \textit{n'est pas REFLEXIVE}}$$

Par contre, ceci n'est pas vrai pour l'inclusion large. Elle est réflexive. On peut très bien écrire

$$E \subset (\ ou\ \subseteq)\ E \text{ au sens large , mais pas } E \subsetneq E.$$

remarque 2. *Un élément peut être vu comme un ensemble et un ensemble peut être vu comme un élément. Ainsi*

$$a \in \{\ a\ \} \in \{\ \{a\}, b\ \} \in \{\ \ \{\ \{a\}, b\ \}\ ,\ c\ \ \}...$$

Axiome 2 : Existence de l'ensemble vide

On postule qu'il existe un ensemble, noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément !!.
L'on peut traduire cet axiome par :

$$(\forall x \in \mathcal{U}) \quad x \quad \notin \quad \emptyset$$

remarque 3. *La négation de la proposition ci−dessus symbolisée par*

$$(\exists x \in \mathcal{U}) \quad x \quad \in \quad \emptyset$$

est par conséquent toujours FAUSSE !

Cet Axiome qui autorise l'existence de ce type d'ensemble vide, permet juste, entre autres, d'exprimer le fait que deux collections d'objets A et B sont disjointes ou n'ont aucun élément en commun.

Il suffit alors d'écrire que leur intersection est égale à l'ensemble vide :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Axiome 3 : Définition d'un ensemble par Extension

Etant donné deux ensembles A et B, on peut alors construire un nouvel ensemble C qui contiendrait ces deux ensembles. On écrit alors

$$C = \{A, B\}.$$

En fait, cet axiome sert uniquement à introduire la notion de définition d'un ensemble par EXTENSION, ou tout simplement, la notation avec des accolades $\{\ \}$.

Cette définition n'est valable que lorsque l'on connaît exactement un par un , tous les éléments de la collection E.

– Si $A = B$, l'ensemble C est appelé singleton : $C = \{A\}$.

– Si $A \neq B$, l'ensemble C porte le nom d'une paire.

– Il arrive que l'ensemble vide soit noté $\{\}$.

Exemple 4. L'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6 est exactement défini par

$$D_6 = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}.$$

Axiome 4 : Définition d'un ensemble par Compréhension Restrictive

Il permet de définir un ensemble à partir d'un certain critère ou condition que devraient satisfaire ses éléments.

On a alors les constructions du type

$$E = \{x \in \mathcal{A} \ : \ P(x)\} \quad \text{où} \quad P(x) \quad \text{est un prédicat de domaine } \mathcal{A};$$

E est alors un ensemble qui contient UNIQUEMENT les éléments de $\mathcal{A}$ (C'est là la RESTRICTION) pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple 5. L'ensemble des diviseurs (dans $\mathbb{Z}$) de 6 sera alors déterminé par

$$D_6 = \{n \in \mathbb{Z} \quad : \quad n|6\}.$$

C'est une définition par compréhension ($n|6$) restrictive ($\in \mathbb{Z}$).

remarque 6. *Avec cet axiome, on est sûr que l'image d'un ensemble par une application est AUSSI un Ensemble. En effet, Si f est une application de l'ensemble de départ E vers l'ensemble d'arrivée F, et que A est un sous-ensemble de E, alors l'image de A par l'application f, notée $f(A)$ est déterminée par*

$$f(A) = \{y \in F \quad : \quad (\exists x \in E) \quad : \quad f(x) = y\}.$$

Qui se met facilement sous la forme d'une définition par compréhension restrictive :

$$f(A) = \{y \in F \quad : \quad P(y)\}$$

où $P(y)$ est le prédicat défini sur l'ensemble F, donné par

$$P(y) \ : \ (\exists x \in E) \quad : \quad f(x) = y.$$

Axiome 5 Définition de l'ensemble des parties

Soit E un ensemble. On peut construire un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, qui contiendrait toutes les parties de E, y compris, l'ensemble vide et E lui même.

remarque 7. *Ainsi, l'ensemble des ensembles n'existe pas, car pour tout ensemble E , on aura toujours*

$$E \ \in \ \mathcal{P}(E) \ \in \ \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \ \in ....$$

Exemple 8.

$$E = \{1, 3, 7\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,7\}, \{3,7\}, \{1,3,7\}\}$$

remarque 9. *Sans le démontrer, on pourrait remarquer que si un ensemble contient un nombre fini N d'éléments, dit de cardinal $= N$,*

L'ensemble de ses parties contiendra exactement 2^N éléments ou aura un cardinal $= 2^N$.

De façon symbolique, on a

$$Card(\mathcal{P}(E)) \ = \ 2^{Card(E)}$$

Axiome 6 Existence des ensembles infinis

Il existe un ensemble, tel que si a est un élément de cet ensemble, alors $\{a\}$ est aussi un élément de cet ensemble. Un exemple de ce type d'ensembles est donné par

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, ...\}$$

ou

$$\{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

En tout et pour tout, cet axiome sert uniquement à introduire la notation avec les trois points de suspension : ...

ainsi par exemple,

L'ensemble des entiers naturels pairs sera noté

$$\{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$$

et l'ensemble des nombres premiers

$$\{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$$

Axiome 7 du Choix

Si l'on dispose d'un certain nombre (fini ou infini) d'ensembles non vides, cet axiome offre la possibilité de **choisir** un élément dans chacun des ensembles de départ.

Cet axiome permet de montrer certains théorèmes que l'on ne peut montrer sans cet axiome. Citons par exemple les théorèmes qui assurent l'existence d'une base dans un espace vectoriel, ou la notion de classe d'équivalence.

C'est l'axiome de la controverse. Certains mathématiciens refusent de l'utiliser vu l'absence d'information sur les éléments **choisis**. On parle d'ensemble SOMBRE !

remarque 10. *Pour ne pas sortir du cadre du programme, nous éviterons de trop détailler les choses.*

Pour ne pas vous compliquer la tâche, Nous partirons de la définition suivante :

Un ensemble, c'est une collection, non ordonnée et sans répétition, d'objets de l'univers $\mathcal{U}$

On insistera sur le fait qu'il y a essentiellement trois façons de caractériser un ensemble E *:*

Par extension

C'est le cas lorsque l'on connait de façon bien déterminée, tous les éléments qui constituent cet ensemble.

Ainsi, on écrira par exemple

$$E = \{2, 4, a, \pi\}$$

ou

$$E = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$$

Par compréhension

Cette façon de construire un ensemble E est possible, lorsque l'on sait que ses éléments satisfont tous une certaine condition, ou obéissent tous à une certaine loi. On écrira alors

$$E = \{x \in \mathcal{U} \quad : \quad P(x)\}$$

ou aussi,

$$(\forall x \in \mathcal{U}) \;\; (\; x \in E \iff P(x) \;)$$

$P(x)$ étant un prédicat à une seule variable.
De même, On peut construire l'ensemble E par l'égalité

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathcal{U}^n \quad : \quad Q(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)\}$$

où $Q(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ est un prédicat à plusieurs variables.

Exemple 11. 1.

$$E = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

2.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad y = 3x + 5\}$$

est une droite du plan.

3.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est une sphère .

Géométriquement, à l'aide d'un diagramme de Venn

(V. Figure 1.1) qui traduit que E et F sont deux ensembles, avec $x \in E$ et $x \in F$.

En résumé

En théorie des ensembles, nous disposons de deux objets FONDAMENTAUX, à savoir, LES ELEMENTS et LES ENSEMBLES.
Il s'agit maintenant d'examiner les différentes interactions possibles entre ces deux objets : (Elément-Ensemble), (Ensemble-Ensemble), (Elément-Elément), ...

2.2 Interaction Elément-Ensemble

2.2.1 Appartenance $\in$

Si l'ensemble A contient l'élément a, on écrira

$$a \in A$$

remarque 12. *La proposition $A \in A$ est fausse .*

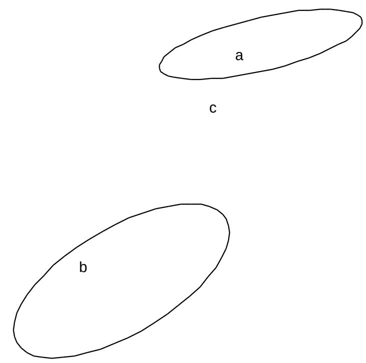

FIGURE 2.1 – Représentation d'un ensemble par un Diagramme de Venn

2.2.2 Non-appartenance $\notin$

Si l'ensemble A ne contient pas l'élément a, on écrira

$$a \notin A$$

Exemple 13.

$$1 \ \in \{\ 2, 3, 7, 1\ \}$$

$$1 \ \notin \{\ 2, 3, 7, 0\ \}$$

$$1 \ \in \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ x^3 = 1\}$$

$$1 \ \notin \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ x^2 = 3\}$$

$$1 \ \in \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ |x-3| = 2\}$$

$$1 \ \notin \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ |x^2-3| = 4\}$$

2.3 Interaction Ensemble-Ensemble

2.3.1 Inclusion $\subset$

On dira que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si et seulement si
Tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B.
En d'autres termes,

$$A \ \subset \ \ B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in A) \ \ x \in B$$

Ou, ce qui qui revient exactement et logiquement au même

$$A \subset B \quad \equiv \quad (\forall x \in A) \;\; x \in B$$

On dit aussi que A est une partie, ou un sous ensemble de l'ensemble B.
On pourrait avoir l'occasion d'écrire $B \supset A$ pour traduire que $A \subset B$

remarque 14. *La définition suivante de l'inclusion est parfois très pratique.*

$$A \subset B \iff (\forall x \in \mathcal{U}) \; \Big(x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B \Big)$$

Raisonnement à suivre pour montrer que $A \subset B$
On prend un élément quelconque de A et l'on montre qu'il est dans B.
On écrit :
Soit $a \in A$, et à l'aide d'arguments valides, on prouve que $a \in B$.

Exemple 15.

$$A = \{6n, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad B = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$$

Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned} & a \in A \\ \Longrightarrow \quad & (\exists n \in \mathbb{N}) \;\; : \;\; a = 6n \\ \Longrightarrow \quad & (\exists n \in \mathbb{N}) \;\; : \;\; a = 3.2n \\ \Longrightarrow \quad & (\exists m = 2n \in \mathbb{N}) \;\; : \;\; a = 3.m \\ \Longrightarrow \quad & a \in B \end{aligned}$$

Conclusion : $A \subset B$.

remarque 16. *De la même façon qu'on a parlé de Non appartenance $\notin$, on définit la Non inclusion par*

$$A \not\subset B \quad \iff \quad (\exists a \in A) \;\; : \;\; a \notin B$$

2.3.2 Egalité de deux ensembles

Definition 17. Soient E et F deux ensembles .

On dira que ces deux ensembles sont égaux si et seulement si, ils contiennent exactement les mêmes éléments.

En d'autres termes,

$$E = F \quad \iff \quad (\forall x \in \mathcal{U}) \quad \Big(x \in E \quad \iff \quad x \in F \Big)$$

ou aussi,

$$E = F \iff \Big((\forall x \in E) \quad x \in F \Big) \;\; \wedge \;\; \Big((\forall x \in F) \quad x \in E \Big)$$

Et de façon plus pratique, on montre la DOUBLE INCLUSION :

$$\boxed{E = F \iff (E \subset F) \ \wedge \ (F \subset E)}$$

Cette définition offre une possibilité pour montrer que deux ensembles sont égaux :
On prend un élément de E puis on montre qu'il appartient à F, et inversement,
On prend un élément de F puis on montre qu'il appartient à E.
Ou de façon encore plus pratique, on utilise l'EQUIVALENCE :

$$\boxed{E = F \iff (\forall x \in \mathcal{U} \quad (x \in E \iff x \in F)}$$

2.3.3 Réunion $\cup$

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

La réunion de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, qui contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.

$$A \cup B = \{x \in E : \ (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}$$

Exemple 18. Si

$$A = \{ \ 2, 3, 7, 1 \ \}$$

et

$$B = \{ \ 3, 1, 2020, 4000 \ \}$$

Alors

$$A \cup B = \{2, 3, 7, 1, 2020, 4000\}$$

2.3.4 Intersection $\cap$

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

L'intersection de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, qui ne contient que les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

$$A \cap B = \{x \in E : (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}$$

Exemple 19. Si

$$A = \{ \ 2, 3, 7, 1 \ \}$$

et

$$B = \{ \ 3, 1, 2020, 3000 \ \}$$

Alors

$$A \cap B = \{3, 1\}$$

2.3.5 Propriétés de la réunion et de l'intersection

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E .

1. Commutativité de $\cup$
$$A \cup B = B \cup A$$
2. Associativité de $\cup$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
3. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
4. Commutativité de $\cap$
$$A \cap B = B \cap A$$
5. Associativité de $\cap$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
6. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

remarque 20. *Les égalités ci-dessus se démontrent simplement en utilisant les définitions et sûrtout les propriétés de la conjonction et de la disjonction !.*

2.3.6 Différence $\backslash$

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

La différence notée $A \backslash B$, contient tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. C'est à dire que

$$A \backslash B = \{x \in E : \ (x \in A) \quad \wedge \quad (x \notin B)\}$$

$$= \{x \in A \quad : \quad x \notin B\}$$

Exemple 21. Si
$$E = \mathbb{N},$$

$$A = \{\ 2, 3, 7, 1\ \}$$

et
$$B = \{\ 3, 1, 2020, 4000\ \}$$

Alors
$$A \backslash B = \{2, 7\} \quad \text{et} \quad B \backslash A = \{2020, 4000\}$$

et

$$B\backslash E = \{\}.$$

Et en particulier,

$$A\backslash A = \{\} = \emptyset.$$

2.3.7 Complémentaire $\complement$

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.

Definition 22. Le complémentaire de A dans E , est défini par

$$\complement_E A = \{x \in E \ : \ x \notin A\} = E\backslash A$$

En particulier,

$$\complement_E E = \{x \in E \ : \ x \notin E\} = E\backslash E = \emptyset$$

A titre d'exercice, on pourra vérifier les lois de De Morgan suivantes :

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \ \cup \ \complement_E B$$

et

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \ \cap \ \complement_E B$$

Exemple 23.

$$\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{-*}$$

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble des réels positifs est l'ensemble des réels Strictement négatifs.

remarque 24. *On dit aussi que les deux parties A et B de l'ensemble E sont complémentaires si $A \ \cup \ B \ = \ E$.*

Par exemple, si $E = \mathbb{N}$, alors les sous ensembles des entiers pairs et impairs sont complémentaires.

2.3.8 Différence symétrique Δ

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.
La différence symétrique notée $A \ \Delta \ B$, est définie par

$$A \ \Delta \ B \ = (A\backslash B) \quad \cup \quad (B\backslash A)$$

ou aussi

$$A \ \Delta \ B \ = \{x \in E \ : \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \quad \vee \quad (x \in B \ \wedge \ x \notin A)\}$$

$$= \complement_A B \ \cup \ \complement_B A$$

2.3.9 Produit Cartésien $\times$

Etant donnés deux ensembles E et F. On définit leur produit cartésien par

$$E \times F = \{(x, y) \ : \ x \in E \quad \wedge \quad y \in F\}$$

Les éléments du produit $E \times F$ portent le nom de "couples."
Remarquer que, contrairement à la paire $\{x, y\}$, l'ordre joue un rôle dans le couple.

Autrement dit :

$$\{x, y\} = \{y, x\} \ \text{ alors que } \ (x, y) \ \neq \ (y, x).$$

De même, on peut définir le produit $E \times F \times G$. Ses éléments sont alors des "triplets" de la forme (x, y, z) avec $x \in E, \ y \in F$ et $z \in G$.
On parle aussi de quadruplet, quintuplet et plus généralement de $n-$uplet.

remarque 25. *Le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 , alors que $E \times E \times E$ sera noté E^3 ...etc*

2.3.10 Recouvrement et Partition d'un ensemble E.

Soi I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille indexée d'ensembles. Cela veut dire tout simplement que pour chaque élément i de I , X_i est aussi un ensemble.

Definition 26. On dit que cette famille est un recouvrement de E si et seulement si

$$E \subset \bigcup_{i \in I} X_i$$

Exemple 27.

$$E = [3, 4], \quad I = \{1, 2\}, \ \ X_i = [0, i^2], \quad E \subset \bigcup_{i \in \{1,2\}} X_i$$

Definition 28. On dit que cette famille est une partition de E si et seulement si

$$(\forall (i, j) \in I^2)(i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{i \in I} X_i$$

Exemple 29.

$$\text{La famille} \quad ([1, 2[,]2, 3]) \quad \text{est une partition de } [1, 3]$$

2.4 Interaction Elément-Elément d'un même ensemble E.

Soit E un ensemble quelconque.

2.4.1 Loi de composition interne

On appelle loi de composition sur E, toute correspondance entre les couples de $E \times E$ et les éléments de E.

$$* \,:\, E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

Les exemples les plus courants sont l'addition $(+)$, la multiplication $(\times)$, l'intersection $(\cap)$, la réunion $(\cap)$ et la composition $(\circ)$.

remarque 30. *Les lois de composition EXTERNES, utiles pour la notion d'Espace Vectoriel, font partie du programme d'Algèbre 2 ! ! ! !.*

Une loi T est BIEN DETERMINEE PAR la donnée d'une expression à deux variables $C(x, y)$ telle que

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad x\ T\ y \quad = \quad C(x, y)$$

Exemple 31.

$$E = \mathbb{R}, C(x, y) = x + y + xy$$

La loi T est alors déterminée par

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad x\ T\ y \quad = \quad x + y + xy$$

Par suite

$$1\,T\,2 \quad = \quad 5 \qquad \text{et} \qquad 5\,T\,3 \quad = \quad 23$$

2.4.2 Loi de composition interne commutative

Par Définition, on dit que la loi $*$ définie sur l'ensemble E est commutative si et seulement si

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad x * y = y * x$$

et qu'elle n'est pas commutative si

$$(\exists (x, y) \in E^2) \quad x * y \neq y * x$$

Exemple 32. Considérons la loi T définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2) \quad m\ T\ n = 2m - n.$$

Cette loi n'est pas commutative car

$$1\ T\ 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2\ T\ 1 = 3.$$

Exemple 33. Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

et

$$B.A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Loi de composition interne associative

Par Définition, on dit que la loi $*$ définie sur l'ensemble E est associative si et seulement si

$$(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad (x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$$

et qu'elle n'est pas associative si

$$(\exists (x, y, z) \in E^3) \quad (x * y) * z \neq x * (y * z)$$

Exemple 34. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de la loi T déterminée par

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad x\, T\, y \quad = \quad x + y - xy$$

Il n'est pas difficile de montrer que cette loi est associative.

Exemple 35. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de la soustraction.

$$(1 - 2) - 3 = -4 \quad \text{mais} \quad 1 - (2 - 3) = 2 \quad \text{donc cette loi n'est pas associative!}$$

2.4.4 Elément Neutre d'une loi

Par Définition, on dit que la loi $*$ définie sur l'ensemble E admet un élément neutre si et seulement si

$$(\exists e \in E) \quad : \quad (\forall x \in E) \quad x * e \; = \; e * x \; = \; x$$

Exemple 36. Considérons l'ensemble des matrices carrées $(2, 2)$ à coefficients réels. Pour toute matrice A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que la matrice I suivante, appelée matrice Identité, est l'élément neutre pour la multiplication

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

remarque 37. *L'élément neutre, lorsqu'il existe , EST UNIQUE!*

En effet supposons que e et e' sont deux éléments neutres pour la loi $*$.
Il s'en suivra que

$$e * e' \ = \ e \ = e'.$$

2.4.5 Symétrique d'un élément

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ ayant e pour élément neutre et $a \in E$.
On dit que l'élément b de E est le symétrique de a relativement à la loi $*$ si et seulement si

$$a * b \ = \ b * a \ = \ e$$

remarque 38. *Pour l'addition, le symétrique s'appelle l'opposé tandis que pour la multiplication, on parle d'inverse.*

L'opposé de 3 est -3 alors que son inverse est $\frac{1}{3}$.

Dans $(\mathbb{Q}, \times)$, l'élément neutre de l'addition, à savoir, 0, n'a pas d'inverse alors que tous les nombres rationnels non nuls ont un inverse .

2.4.6 Notion de Groupe

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $*$. On dit que le couple $(G, *)$ est un groupe ou a une structure de groupe si et seulement si

1. La loi $*$ est associative.

2. Cette même loi admet un élément neutre.

3. Tout élément de G possède un symétrique.

Si la loi est en plus commutative, on dira que le groupe $(G, *)$ est commutatif ou Abélien.

Exemple 39. Il est très facile de s'assurer que

$$(\mathbb{N}, +) \text{ n'est pas un groupe, alors que } \quad (\mathbb{Z}, +) \quad \text{est un groupe commutatif.}$$

remarque 40. *En ajoutant d'autres lois, et en imposant à ces lois d'autres propriétés (distributivité, externe,...), on définit de nouvelles structures : (Annneau, Module, Corps, Espace vectoriel, ...). Ces notions seront détaillées au cours des années à venir.*

2.4.7 Notion de Relation Binaire

Soit E un ensemble quelconque. Une relation $\mathcal{R}$ définie sur E est une sorte de liaison entre certains éléments de E et d'autres éléments (éventuellement plusieurs) de E.

Si l'élément x de E est en liaison ou en correspondance avec l'élément y de E, on écrira $x \mathcal{R} y$ et l'on dira que x est en relation avec y.

remarque 41.
- *Il se peut qu'un élément soit en relation avec lui même.*
- *Il arrive aussi qu'un élément ne soit en relation avec aucun des éléments de E.*
- *Si un élément x n'est pas lié ou n'est pas en relation avec l'élément y , on écrira*

$$x \not\mathcal{R} y.$$

- *Une relation $\mathcal{R}$ est complétement déterminée par la donnée de la condition $C(x, y)$ nécessaire et suffisante suivante :*

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad x \mathcal{R} y \quad \iff \quad C(x, y)$$

C'est une sorte de définition par compréhension.

Exemple 42. Prenons $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}$ définie par

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2) \quad x \mathcal{R} y \quad \iff |x - y| \text{ est divisible par } 3.$$

On a alors

$$5 \ \mathcal{R} \ 11 \quad \text{et } 4 \text{ n'est pas en relation avec } 11$$

Definition 43. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur E. On appelle graphe G de la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times E$, tels que x est en relation avec y.

$$\boxed{G = \{(x, y) \in E \times E \quad : \quad x\mathcal{R} \, y\}}$$

Exemple 44. Prenons $E = \{2, 4, 9, 3, 10\}$ et la relation $\mathcal{R}$ déterminée par

$$(\forall (x, y) \in E^2) \;\; x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x|y$$

Il est clair que

$$G = \{(2, 4), (2, 10), (3, 9)\}$$

2.4.8 Compatibilité d'une relation binaire avec une loi de composition interne

Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ et d'une loi de composition interne $*$.

Definition 45. On dit que la loi $*$ est compatible A droite avec la relation binaire $\mathcal{R}$ si et seulement si

$$(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad \Big(x \;\mathcal{R}\; y \quad \Longrightarrow \quad (x * z) \;\mathcal{R}\; (y * z) \Big)$$

remarque 46. *On verra un peu plus loin que la congruence dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence COMPATIBLE à la fois avec l'addition et avec la multiplication.*

La relation d'ordre usuel, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, est compatible avec l'addition, MAIS pas avec la multiplication (par un nombre NEGATIF) !

2.4.9 Relation d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si les trois conditions suivantes sont réunies !

1. $\mathcal{R}$ est réflexive
$$(\forall x \in E) \quad (x \;\mathcal{R}\; x)$$
2. $\mathcal{R}$ est symétrique
$$(\forall (x, y) \in E^2) \;\; \Big((x \;\mathcal{R}\; y) \;\Longrightarrow\; (y \;\mathcal{R}\; x) \Big)$$
3. $\mathcal{R}$ est transitive
$$(\forall (x, y, z) \in E^3) \;\; \Big((x \;\mathcal{R}\; y) \wedge (y \;\mathcal{R}\; z) \;\Longrightarrow\; x \;\mathcal{R}\; z \Big)$$

Exemple 47. Le premier exemple qui vient à l'esprit, est celui de "l'égalité".

Sur n'importe quel ensemble, La relation définie par

$$x \;\; \mathcal{R} \;\; y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

est par définition, une relation d'équivalence .

Exemple 48. Le deuxième exemple qui vient à l'esprit, est celui justement de "l'équivalence".

Sur l'ensemble des propositions , La relation définie par

$$p \;\; \mathcal{R} \;\; q \quad \Longleftrightarrow \quad (p \Longleftrightarrow q)$$

est une relation d'équivalence .

Exemple 49. Dans l'ensemble $\mathbb{N}^2$, La relation définie par

$$(\forall((x,y),(z,t)) \in \mathbb{N}^4) \quad \Big((x,y) \;\mathcal{R}\; (z,t) \quad \Longleftrightarrow \quad xt = yz\Big)$$

est bien une relation d'équivalence (A vérifier en exercice). A noter que

$$(2,3) \;\mathcal{R}\; (4,6) \;\mathcal{R}\; (6,9) \;\mathcal{R}\; (8,12) \; ....$$

Exemple 50. Dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, La relation définie par

$$(\forall(m,n) \in \mathbb{N}^2) \quad \Big(m \;\mathcal{R}\; n \quad \Longleftrightarrow \quad m+n = 23\Big)$$

n'est pas une relation d'équivalence, car elle n'est pas réflexive ($11 + 11 = 22 \neq 23$).

Exemple 51. Dans l'ensemble des propositions $\mathcal{P}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(\forall(p,q) \in \mathcal{P}^2) \quad \Big(p \;\mathcal{R}\; q \quad \Longleftrightarrow \quad (p \implies q)\Big)$$

n'est pas une relation d'équivalence. Elle est réflexive, transitive mais pas symétrique.

Exemple 52. Dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemnle E, la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(\forall(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2) \quad \Big(A \;\mathcal{R}\; B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B\Big)$$

n'est pas une relation d'équivalence. Elle est réflexive, transitive mais pas symétrique.

2.4.10 Classe d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'EQUIVALENCE définie sur E.

Pour tout élément a de E , on appelle classe d'équivalence de a, l'ensemble noté $\overline{a}$, défini par

$$\overline{a} \;=\; \{x \in E \quad : a \,\mathcal{R}\, x\}$$

la classe de a contient les éléments de E qui sont en relation avec a.

remarque 53. *L'ensemble de toutes les classes d'équivalence porte le nom d'Ensemble Quotient. Il est noté* $E/\mathcal{R}$.

La notion d'ensemble quotient permet de réduire la taille de l'espace dans lequel on se situe. Par exemple, la congruence modulo n ramène l'étude dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, *à l'ensemble fini :* $\{0,1,2,...,n-1\}$!!

Exemple 54.

$$E = \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad x \,\mathcal{R}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \text{ est un multiple de 3.}$$

$$\overline{0} = \{..., -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, ...\}$$
$$\overline{1} = \{..., -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, ...\}$$
$$\overline{2} = \{..., -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, ...\}$$

$$\overline{3} = \overline{0}$$
$$\overline{4} = \overline{1}$$
$$\overline{-1} = \overline{2}$$

L'ensemble quotient est donc

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}.$$

De même,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}\}.$$

2.4.11 Relation d'ordre

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si les trois conditions suivantes sont réunies !

1. $\mathcal{R}$ est réflexive
$$(\forall x \in E) \quad (x \mathcal{R} x)$$
2. $\mathcal{R}$ est ANTIsymétrique
$$(\forall (x, y) \in E^2) \ \Big(((x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x)) \implies x = y\Big)$$
3. $\mathcal{R}$ est transitive
$$(\forall (x, y, z) \in E^3) \ \Big(((x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z)) \implies x \mathcal{R} z\Big)$$

Dans ce cas, on dit que l'ensemble E est ordonné.

remarque 55. *Soient E est un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur E, et $(x, y) \in E^2$.*

1. *La notion d'ordre est à la base de la notion de voisinage ($|x - x_0| < \epsilon$), de boule ouverte, de limite, de continuité,...*
2. *On dit que les éléments x et y sont comparables (relativement à la relation $\mathcal{R}$)*
$$si \quad x \mathcal{R} y \quad ou \quad y \mathcal{R} x$$
3. *On dit que $\mathcal{R}$ est un ordre TOTAL si tous les éléments de E sont deux à deux comparables.*
4. *On dira que $\mathcal{R}$ est un ordre PARTIEL s'il existe au moins deux éléments de E qui ne sont pas comparables.*

Exemple 56. Sur $\mathbb{R}$, La relation définie par

$$(x \mathcal{R} y) \iff y - x \in \mathbb{R}^+$$

est bien une relation d'ordre notée $\leq$ et appelée " Ordre Naturel".

Exemple 57. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. La relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)) \quad \Big(A \ \mathcal{R} \ B \iff (A \subset B)\Big)$$

C'est une relation d'ordre Partiel car deux parties disjointes ne sont pas comparables.

Exemple 58. Dans $\mathbb{Z}$, La divisibilité n'est pas une relation d'ordre partiel car elle n'est pas antisymétrique.

$$2|-2 \quad \text{et} \quad -2|2 \quad \text{mais} \quad -2 \neq 2.$$

Dans $\mathbb{N}$, La divisibilité est une relation d'ordre partiel.

$$3 \nmid 7.$$

2.4.12 Minorant et Majorant d'un ensemble

Soit A une partie d'un l'ensemble E ordonné, munie de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ et $(m, M) \in E^2$.

Definition 59. On dit que m(resp.M) est un minorant (resp. majorant) de A relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$ Si et Seulement Si

$$(\forall x \in A) \quad m \ \mathcal{R} \ x$$

et

$$(\forall x \in A) \quad x \ \mathcal{R} \ M$$

Exemple 60. Relativement à l'ordre usuel sur $E = \mathbb{Z}$.

$$-3 \text{ est un minorant de } \quad A = \{4, -2, 7, 11\}$$

$$13 \text{ est un majorant de } \quad A = \{4, -2, 7, 11\}$$

2.4.13 Borne Inférieure et Borne Supérieure

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation d'ordre, A une partie de E et $(m, M) \in E^2$.

Definition 61. On dit que m(resp.M) est la borne inférieure (resp. la borne supérieure) de A relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$ Si et Seulement Si

m est le plus grand minorant (resp. le plus petit majorant) de A.

On écrit alors , dans ce cas

$$m = \inf A \quad \text{et} \quad M = \sup A$$

remarque 62. *Vous verrez en Analyse, ce que l'on appelle la Caractérisation de la borne inférieure (resp.supérieure) qui offre une définition beaucoup plus pratique .*

Exemple 63.

$$\inf\{4, -2, 7, 11\} = -2$$

$$\sup\{4, -2, 7, 11\} = 11$$

$$\inf]-4, 1] = -4 \text{ si } \quad E = \mathbb{R}$$

$$\sup]-1, \sqrt{2}[= \sqrt{2} \quad \text{si} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\sup]-1, \sqrt{2}[\text{ n'existe pas si } \quad E = \mathbb{Q}$$

remarque 64. *Il se peut qu'un ensemble majoré (resp. minoré) n'admette pas de borne supérieure (resp.inférieure). Prenons l'exemple suivant*

$$E = \mathbb{R} \quad et \quad A = \{x \in E \quad : \quad x^2 < 5\}$$

alors $\sup A = \sqrt{5}$ *. Mais si*

$$E = \mathbb{Q} \quad et \quad A = \{x \in E \quad : \quad x^2 < 5\}$$

alors $\sup A$ *n'existe pas* $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ *!!*

2.4.14 plus Grand et plus Petit Element

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ et $(m, M) \in E^2$.

Definition 65. On dit que $M($ resp.$m)$ est le plus grand (resp. petit) élément de E relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$ Si et Seulement Si

$$(\forall x \in E) \quad x \ \mathcal{R} \ M$$

et

$$(\forall x \in E) \quad m \ \mathcal{R} \ x$$

On écrit alors :

$$\min(E) \ = \ m \text{ et } \max(E) = M$$

Exemple 66. Relativement à l'ordre naturel

$$\min(\{4, -2, 7, 11\}) \ = \ -2 \text{ et } \max(\{4, -2, 7, 11\}) = 11$$

$$\min([-3, \pi[) \ = \ -3 \text{ et } \max([1, \sqrt{2}[) \text{ n'existe pas}$$

2.5 Interaction Elément d'un ensemble E - Elément d'un autre Ensemble F.

2.5.1 Notion d'application

Soient E et F deux ensembles. Une application de E vers F, c'est une correspondance entre les éléments de E et les éléments de F, en ce sens que, à chaque élément x de E, on associe un et un SEUL élément y de F noté $f(x)$ et appelé " image de " x.

L'ensemble E est appelé " Ensemble de Départ," tandis que l'ensemble F porte le nom d'ensemble d'arrivée.

Si l'élément y de F est l'image de l'élément x de E, alors x est l'antécédent de y.

remarque 67. *La définition donnée ci-dessus, est représentée par le schéma suivant :*

$$\begin{aligned} f \ : \ E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Cas Particulier où $F = E$.

L'application qui à chaque élément x de E associe le même élément x s'appelle l'identité. Elle est notée Id_E

$$\begin{aligned} Id_E \ : \ E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Exemple 68.

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

L'image du réel 11 est donc $11^2 = 121$.

Le réel 144 a deux antécédents, à savoir 12 et -12 car $12^2 = (-12)^2 = 144$.

Exemple 69. Soit g telle que

$$\begin{aligned} g \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x-8} \end{aligned}$$

g n'est pas une application vu que certains éléments de l'ensemble de départ (ceux qui sont strictement inférieurs à 8) n'ont pas d'image. Par exemple, $g(6)$ n'existe pas.

g n'est définie que sur une partie $D = [8, +\infty[$ de l'ensemble de départ :

On dit alors que g est une Fonction (pas une application) et D est son DOMAINE de définition.

L'on note, dans ce cas

$$\mathcal{D}_g = [8, +\infty[$$

2.5.2 Restriction d'une Application

Soit f une application définie de l'ensemble E vers l'ensemble F et $A \subset E$.
On appelle restriction de f au sous-ensemble A, tout simplement, l'application, notée $f_{/A}$ caractérisée par

$$\begin{array}{rcl} f_{/A} \; : \; A & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

remarque 70. *Si f est une **FONCTION** de l'ensemble E vers l'ensemble F avec $\mathcal{D}_f = D$, Alors*
*f est une **APPLICATION** de $\mathcal{D}_f = D$ vers F .*
Noter la différence!!

2.5.3 Prolongement d'une fonction

Soit E, F deux ensembles, A une partie de E et f une fonction de E vers F ayant A comme domaine de définition.

On appelle prolongement g de f à l'ensemble E, toute fonction définie de E vers F qui coincide avec f sur A.

En d'autres termes, f est la restriction de l'application g à la partie A.

On a donc

$$f \text{ est définie sur } A, g \text{ est définie sur } E \text{ avec } (\forall x \in A) \;\; f(x) = g(x)$$

remarque 71. *Si la nouvelle fonction g est <u>continue</u>, on parlera alors de " prolongement par <u>continuité</u>"*

Exemple 72. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Le domaine de f est donc $\mathbb{R}^*$.

On définit alors un prolongement g de $\mathbb{R}$ vera $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \;\; g(x) = f(x) \text{ et de plus,} \quad g(0) = 1$$

g est alors un prolongement de f à $\mathbb{R}$ qui est en plus continue.

2.5.4 Application Injective

Par définition, une application f de E vers F est injective (ou une injection de E DANS F), si et seulement si tout élément de l'ensemble image a au **<u>plus</u>** un antécédent. En d'autres termes,

$$f \text{ est injective } \iff (\forall (x,y) \in E^2) \;\; (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

ou en utilisant la contraposée,

$$f \text{ est injective } \iff (\forall (x,y) \in E^2)\ (f(x) = f(y) \implies x = y)$$

Ce qui donne en prenant la négation

$$f \text{ n'est pas injective } \iff (\exists (x,y) \in E^2)\ :\ (x \neq y)\ \wedge\ (f(x) = f(y))$$

Exemple 73. L'application

$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \ \mapsto\ f(x) = (x+1)(x-3)$$

n'est pas injective car $f(-1) = f(3) = 0$.

2.5.5 Application Surjective

Par définition, une application f de E vers F est surjective (ou une surjection de E SUR F), si et seulement si tout élément de l'ensemble image a au **moins** un antécédent. En d'autres termes,

$$f \text{ est surjective } \iff (\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ : y = f(x)$$

Qui devient en prenant la négation

$$f \text{ n'est pas surjective } \iff (\exists y \in F)\ :\ (\forall x \in E)\ f(x) \neq y$$

Exemple 74. L'application

$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \ \mapsto\ f(x) = x^2 + 1$$

n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent vu que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = x^2 + 1 > 0$.

2.5.6 Application Bijective

Par définition, une application f de E vers F est dite bijective ((ou une bijection de E VERS F), si et seulement si tout élément de l'ensemble image a **un et un seul** antécédent. En d'autres termes,

$$f \text{ est Bijective } \iff (\forall y \in F)\ (\exists !x \in E)\ :\ y = f(x)$$

2.5.7 Application Inverse d'une Bijection

Soit f une bijection de E vers F.

L'application définie sur F, qui associe à chaque élément x de F, l'unique élément y de E tel que :

$$f(y) = x$$

Est une bijection, appelée application inverse de f, et notée f^{-1}.

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & & a \mapsto b = f(a) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & : & F & \longrightarrow & E \\ & & & b \mapsto a = f^{-1}(b) & \end{array}$$

remarque 75. *Par définition, on a*

$$(\forall a \in E) \quad f^{-1}(f(a)) = a$$

$$(\forall b \in F) \quad f(f^{-1}(b)) = b$$

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad et \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Exemple 76.

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & a \mapsto b = f(a) = 2a + 19 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & b \mapsto a = f^{-1}(b) = \dfrac{b - 19}{2} & \end{array}$$

2.5.8 Comment montrer qu'une Application est Injective, Surjective, Bijective ou NON ...

Injective

On prend deux éléments arbitraires x et y, de l'ensemble de départ E tels que $f(x) = f(y)$ et On montre que nécessairement, $x = y$.

Non Injective

Il faudra trouver deux éléments x et y <u>distincts</u> de l'ensemble de départ E tels que $f(x) = f(y)$.

Surjective

On prend un élément quelconque y de l'ensemble d'arrivée F et l'on montre l'existence d'un élément x de l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$. Pour cela, on résoud l'équation en x donnée par

$$f(x) = y$$

Non Surjective

Il faudrait trouver un élément y de l'ensemble d'arrivée F qui n'ait pas d'antécédent, c'est à dire tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution dans l'ensemble E.

Bijective : $1^{\text{ère}}$ méthode

On prend un élément quelconque y de l'ensemble d'arrivée F et l'on montre l'existence d'un élément Unique x de l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$.

Bijective : $2^{\text{ème}}$ méthode

On montre que f est à la fois Injective et Surjective.

Non Bijective

Il suffit de montrer qu'elle n'est pas injective OU qu'elle n'est pas surjective.

2.5.9 Fonction Composée

Soient E, F et G trois ensembles, f une fonction de E vers F de domaine D_f, et g une fonction de F vers G de domaine D_g.

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g \circ f}$$

Soit x un élément de D_f tel que $f(x) \in D_g$. On peut alors définir sans aucun problème, l'image de $f(x)$ par la fonction g.

Cette image $g(f(x))$ sera notée $(g \circ f)(x)$. Ainsi, cette fonction composée notée $g \circ f$

aura comme domaine l'ensemble :

$$D_{g\circ f} = \{x \in E \ \ : \ \ x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) \ \in \ D_g\}$$

Exemple 77.

$$E = F = G = \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$
$$D_g = \mathbb{R}^+$$
$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}\,_; : \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{x-2} \ \in \ \mathbb{R}^+\}$$
$$=]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$$

Exemple 78.

$$E = F = G = \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto \frac{x-1}{3-x}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x+1}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$
$$D_g = [-1, +\infty[$$
$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}\,_; : \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{3-x} \ \in \ [-1, +\infty[\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}\,_; : \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{3-x} + 1 \ \in \ [0, +\infty[\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}\,_; : \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3-x} \ \in \ [0, +\infty[\}$$
$$=]-\infty, 3[$$

remarque 79. *1. La composition de deux fonctions est une loi Non commutative avec $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 2x+1$ et $g : x \mapsto 3x-2$, on verifie que*

$$f(g(1)) = f(1) = 3 \quad \textit{et} \quad g(f(1)) = g(3) = 7!!$$

2. La composition de deux fonctions est une loi Associative :

$$f \circ (g \circ h) = f(g \circ h) = f(g(h)) = (f \circ g)(h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$$

2.6 Interaction Ensemble-Application

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

2.6.1 Image directe d'un ensemble par une application

Pour toute partie A de E, on définit l'image de A par l'application f, comme étant l'ensemble (Sous-ensemble de F) qui contient les images de tous les éléments de A. Il est donné par

$$\boxed{f(A) = \{f(x),\ x \in A\}}$$

Exemple 80.

$$E = \{2, 3, 4, 5\},\quad F = \{24, 36, 48, 50, 60\}\ ,\ A = \{2, 3, 4\}\ \text{ et }\ f : x \mapsto 12x$$

$$f(A) = \{f(2), f(3), f(4)\} = \{24, 36, 48\}$$

remarque 81. *Si f est une application de l'ensemble E vers l'ensemble F, alors f est une Surjection de E sur $f(E)$. On parle de la surjection Canonique.*

2.6.2 Quelques propriétés de l'Image directe

Soient A_1 et A_2 deux parties de E.

Inclusion

$$\boxed{A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)}$$

démonstration 82. *Soit $y \in f(A_1)$.*
$y \in f(A_1) \implies (\exists x_1 \in A_1)\ :\ y = f(x_1)$
$x_1 \in A_1$ *et* $A_1 \subset A_2 \implies x_1 \in A_2$
$x_1 \in A_2$ *et* $y = f(x_1) \implies y \in f(A_2)$
conclusion

$$f(A_1) \subset f(A_2)$$

remarque 83. *La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons*

$$E = \mathbb{R}, A_1 = [-1, 0], A_2 = [0, 2]\ \textit{et}\ \ f : x \mapsto x^2$$

donc

$$f(A_1) = [0, 1] \subset f(A_2) = [0, 4]\ \textit{mais}\ A_1 \not\subseteq A_2$$

Réunion

$$\boxed{f(A_1 \cup A_2) = f(A_1)\ \cup\ f(A_2)}$$

démonstration 84. *On veut montrer que*

$$(\forall y \in \mathcal{U}) \ \Big(y \in f(A_1 \ \cup \ A_2) \iff y \in f(A_1) \ \cup \ f(A_2)\Big)$$

Utilisons le raisonnement par équivalence.

Soit $y \in \mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} & y \in f(A_1 \ \cup \ A_2) \\ \iff & (\exists x \in A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ \iff & (\exists x \in A_1) : y = f(x) \vee (\exists x \in A_2) : y = f(x) \\ \iff & (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2) \\ \iff & y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

CQFD.

Intersection

$$\boxed{f(A_1 \cap A_2) \ \subset \ f(A_1) \ \cap \ f(A_2)}$$

démonstration 85. *On veut montrer que*

$$(\forall y \in f(A_1 \ \cap \ A_2)) \quad y \in f(A_1) \ \cap \ f(A_2)$$

Utilisons le raisonnement direct.

Soit $y \in f(A_1 \ \cap \ A_2)$.

$$\begin{gathered} y \in f(A_1 \ \cap \ A_2) \implies \\ (\exists x \in A_1 \ \cap \ A_2) \ : \ y = f(x). \\ x \in A_1 \ \cap \ A_2 \implies x \in A_1 \ \wedge \ x \in A_2 \\ x \in A_1 \implies f(x) \in f(A_1) \\ x \in A_2 \implies f(x) \in f(A_2) \\ \Big(f(x) \in f(A_1) \wedge f(x) \in f(A_2)\Big) \implies f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2) \\ \implies y \in f(A_1) \cap f(A_2) \end{gathered}$$

CQFD.
Essayons de montrer la réciproque :

$$(\forall y \in f(A_1) \ \cap \ f(A_2)) \quad y \in f(A_1 \ \cap \ A_2)$$

Utilisons le raisonnement direct.

Soit $y \in f(A_1) \ \cap \ f(A_2)$.

$$y \in f(A_1) \ \cap \ f(A_2) \quad \Longrightarrow y \in f(A_1) \ \wedge \ y \in f(A_2)$$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \ &\Longrightarrow \ (\exists x_1 \in A_1) \ : \ y = f(x_1) \\ y \in f(A_2) \ &\Longrightarrow \ (\exists x_2 \in A_2) \ : \ y = f(x_2) \end{aligned}$$

Mais rien ne nous garantit que $x_1 = x_2$.

Pour s'assurer que l'égalité n'a pas lieu, considérons l'exemple qui suit ,

Exemple 86.

$$\begin{gathered} A_1 = [-4, 2] \\ A_2 = [1, 4] \\ f : x \mapsto x^2 \\ A_1 \cap A_2 = [1, 2] \\ f(A_1 \cap A_2) = f([1, 2]) = [1, 4] \\ f(A_1) \ \cap \ f(A_2) = f([-4, 2]) \cap f([1, 4]) = [0, 16] \cap [1, 16] = [1, 16] \end{gathered}$$

Différence

$$\boxed{f(A_1) \ \setminus \ f(A_2) \ \subset \ f(A_1 \ \setminus \ A_2)}$$

démonstration 87. *Soit* $y \in f(A_1) \ \setminus \ f(A_2)$.

$$y \in f(A_1) \ \setminus \ f(A_2) \ \Longrightarrow \ y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \ &\Longrightarrow \ (\exists x \in A_1) : y = f(x) \\ y = f(x) \wedge y \notin f(A_2) \ &\Longrightarrow \ x \notin A_2 \\ x \in A_1 \wedge x \notin A_2 \ &\Longrightarrow \ x \in (A_1 \setminus A_2) \\ &\Longrightarrow \ y \in f(A_1 \setminus A_2) \end{aligned}$$

CQFD.
Essayons de montrer la réciproque pour voir pourquoi, il n'y a pas égalité.
Soit $y \in f(A_1 \ \setminus \ A_2)$.

$$y \in f(A_1 \ \setminus \ A_2) \quad \Longrightarrow \quad (\exists \, x \in A_1 \ \setminus \ A_2) \ : \ y = f(x)$$

$$x \in A_1 \ \setminus \ A_2 \quad \Longrightarrow x \in A_1 \wedge x \notin A_2$$

$$x \in A_1 \ \Longrightarrow \ f(x) \in f(A_1)$$

Mais

$x \notin A_2$ *n'implique pas forcément* $f(x) \notin f(A_2)$!!!!

Exemple 88.

$$A_1 = [-3, -1] \ , \ \ A_2 = [1, 3] \quad \text{et} \quad f : x \mapsto x^2$$

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 = [-3, -1], \ \ f(A_1 \setminus A_2) = [1, 9]$$
$$f(A_1) \setminus f(A_2) = [1, 9] \ \setminus \ [1, 9] = \emptyset!!$$

2.6.3 Image Réciproque d'un ensemble par une application

Pour toute partie B de F, on définit l'image réciproque de B , comme étant l'ensemble (Sous-ensemble de E) qui contient les antécédents de tous les éléments de B. Il est donné par

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E, \ \ : \ \ f(x) \in B\}}$$

Exemple 89.

$$E = \{2, 3, 4, 5\}, \ \ F = \{24, 36, 48, 50, 60\} \ , \ B = \{36, 60\} \ \text{ et } \ f : x \mapsto 12x$$

$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(36), f^{-1}(60)\} = \{3, 5\}$$

2.6.4 Quelques propriétés de l'Image réciproque

Soient E et F deux ensembles , f une application de E vers F, et B_1, B_2 deux parties de l'ensemble d'arrivée F. On a alors les propriétés suivantes :

Inclusion

$$\boxed{B_1 \ \subset \ B_2 \ \ \Longrightarrow \ \ f^{-1}(B_1) \ \subset \ f^{-1}(B_2)}$$

démonstration 90. *Soit* $x_1 \in f^{-1}(B_1)$.

$$x_1 \in f^{-1}(B_1) \quad \Longrightarrow f(x_1) \in B_1$$

$$f(x_1) \in B_1 \ \textit{et} \ \ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f(x_1) \ \in \ B_2$$
$$\Longrightarrow x_1 \in f^{-1}(B_2)$$

Conclusion :

$$f^{-1}(B_1) \ \subset \ f^{-1}(B_2) \quad \textit{CQFD.}$$

Réunion

$$\boxed{f^{-1}(B_1 \ \cup \ B_2) = f^{-1}(B_1) \ \cup \ f^{-1}(B_2)}$$

démonstration 91. *On veut montrer que*

$$(\forall x \in \mathcal{U}) \ \Big(x \in f^{-1}(B_1 \ \cup \ B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \ \cup \ f^{-1}(B_2) \Big)$$

Utilisons le raisonnement par équivalence.

Soit $x \in \mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B_1 \ \cup \ B_2) \\ \iff & f(x) \in B_1 \ \cup \ B_2 \\ \iff & f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

CQFD.

Intersection

$$\boxed{f^{-1}(B_1 \ \cap \ B_2) = f^{-1}(B_1) \ \cap \ f^{-1}(B_2)}$$

démonstration 92. *On veut montrer que*

$$(\forall x \in \mathcal{U}) \ \Big(x \in f^{-1}(B_1 \ \cap \ B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \ \cap \ f^{-1}(B_2) \Big)$$

Utilisons le raisonnement par équivalence.

Soit $x \in \mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B_1 \ \cap \ B_2) \\ \iff & f(x) \in B_1 \ \cap \ B_2 \\ \iff & f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

CQFD.

Différence

$$\boxed{f^{-1}(B_1 \ \setminus \ B_2) = f^{-1}(B_1) \ \setminus \ f^{-1}(B_2)}$$

démonstration 93. *On veut montrer que*

$$(\forall x \in \mathcal{U}) \ \left(x \in f^{-1}(B_1 \ \setminus \ B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \ \setminus \ f^{-1}(B_2)\right)$$

Utilisons le raisonnement par équivalence.

Soit $x \in \mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B_1 \ \setminus \ B_2) \\ \iff & f(x) \in B_1 \ \setminus \ B_2 \\ \iff & f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2 \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2) \\ \iff & x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

CQFD.

Le langage de la théorie des ensembles et les notions qui vont avec, à savoir, les relations, les lois de composition, les applications et les fonctions constituent la base et le passage obligé pour un futur mathématicien. Le chapitre prochain portant sur l'arithmétique des entiers naturels, permet de vérifier cela.