SMIA 1

PREREQUIS POUR LES MODULES D'ANALYSE

Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
hamam_Abdallah Maths stackexchange.com

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

$\boxed{\text{Inna Fii Daalika La Aayaatine Li9awmine Ya39iloune= qui Raisonnent.}}$

Toutes les REMARQUES venant de votre part seront les BIENVENUES sur

a.hammam@fsm.umi.ac.ma.

1.1 Comment préparer son examen

1) D'abord, Connaître les notions de base (collège + lycée).
2) Ensuite, bien Lire le cours.
3) Comprendre et apprendre les définitions.
4) Comprendre et refaire les démonstrations des théorèmes du cours.
5) Préparer les TD.
6) Participer aux TD (poser des questions, passer au tableau et proposer d'autres solutions).
7) Faire d'autres exercices (les livres, internet ,..) .

1.2 Les types de questions posées en maths

En gros, on peut classifier les questions posées en maths en deux types :

1) PRATIQUE :

$$\boxed{\text{Calculer ...}}$$

Pour répondre à ce type de question, il faut connaître les règles de calcul (+, ×, puissance , ...) et les formules (trigonomérriques, de dérivations, ...).

2) THEORIQUE :

$$\boxed{\text{Montrer que } P(\text{ est vraie})}.$$

Pour pouvoir répondre à ce type de question, il faut connaître, en plus des règles de calcul, les définitions, les théorèmes, les propriétés, et les raisonnements .

P peut prendre une des formes suivantes :

1)
$$P \quad : \quad (\forall x \in E) \;\; P_x$$

2)
$$P \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; P_n$$

3)
$$P \quad : \quad (\exists x \in E) \quad : P_x$$

4)
$$P \quad : \quad (\forall x \in E) \;\; (\exists y \in F) \quad : P_{x,y}$$

5)
$$P \quad : \quad (\exists x \in E) \;\; (\forall y \in F) \quad : P_{x,y}$$

6)
$$P \quad : \quad f \text{ est continue en } a$$

7)
$$P \quad : \quad (u_n) \text{ est croissante}$$

8)
$$P \quad : \quad (u_n) \text{ est convergente}$$

9)
$$P \quad : \quad \sup A = M$$

10)
$$P \quad : \quad f \text{ est dérivable en } a.$$

Soit on démontre de façon directe que P est vraie, soit on fait appel au schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{N} & & \\ & & \Uparrow & & \\ T & \Longleftrightarrow & \boxed{P} & \Longleftrightarrow & Q \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{S} & & \end{array}$$

Q est une proposition équivalente à P par définition.

T est une proposition équivalente à P par un théorème.

S est une condition suffisante, en ce sens que si S est vraie, alors P est vraie aussi.

N est une condition nécessaire, en ce sens que si P est vraie, alors N est vraie aussi, et par contraposition, si N est fausse, alors P est fausse.

Donc pour montrer P, on montre Q, T ou S.

Et pour montrer $\overline{P}$, on montre $\overline{Q}$, $\overline{T}$ ou $\overline{N}$.

Exemples

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et (m, M) un couple de réels. On a les schémas suivants :

$$\begin{array}{ccccc} & & M \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A & & \\ & & \Uparrow & & \\ \begin{cases}(\forall x \in A) \ \ x \leq M \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A) : M - \epsilon < a \leq M\end{cases} & \Longleftrightarrow & \boxed{\sup A = M} & \Longleftrightarrow & M = \min\{a \in \mathbb{R} \ : \ (\forall x \in A) \ x \leq a\} \\ & & \Uparrow & & \\ & & M = \max E & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & m \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A & & \\ & & \Uparrow & & \\ \begin{cases}(\forall x \in A) \ \ x \geq m \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A) : m \leq a < m + \epsilon\end{cases} & \Longleftrightarrow & \boxed{\inf A = m} & \Longleftrightarrow & m = \max\{a \in \mathbb{R} \ : \ (\forall x \in A) \ x \geq a\} \\ & & \Uparrow & & \\ & & m = \min E & & \end{array}$$

Soit (u_n) une suite réelle :

$$\begin{array}{ccccc} & & (u_n) \text{ admet une sous suite convergente} & & \\ & & \Uparrow & & \\ (\exists K \in \mathbb{R}^+) \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ |u_n| \leq K & \Longleftrightarrow & \boxed{(u_n) \text{ est bornée}} & \Longleftrightarrow & (\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2) \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ m \leq u_n \leq M \\ & & \Uparrow & & \\ & & (u_n) \text{ est convergente} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (u_n) \text{ est convergente ou } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty & & \\ & & \Uparrow & & \\ (-u_n) \text{ est décroissante} & \Longleftrightarrow & \boxed{(u_n) \text{ est croissante}} & \Longleftrightarrow & (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_n \leq u_{n+1} \\ & & \Uparrow & & \\ & & (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > 0 \text{ et } (\dfrac{1}{u_n}) \text{ décroissante} & & \end{array}$$

$$(u_n) \text{ est bornée}$$

$$\Uparrow$$

$$(u_n) \text{ est convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{(u_n) \text{ est de Cauchy}} \Longleftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall p, q \geq N) \ \ |u_p - u_q| < \epsilon$$

$$\Uparrow$$

$$(\forall n, p \in \mathbb{N}) \ |u_{n+p} - u_n| < v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

Chapitre 2

Notions de base

2.1 Règles de comparaison

Elles sont nécessaires à la recherche de minorants ou de majorants.
Il est bon de connaître les quelques majorations classiques suivantes :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin(x)| \leq |x| \text{ et } |arctg(x)| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0$$

2.1.1 Compatibilité de l'addition avec la relation d'ordre

$$\boxed{(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}) \quad a < b \Longrightarrow a + c < b + c}$$

2.1.2 Compatibilité de la multiplication par un POSITIF

$$\boxed{(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \quad a < b \Longrightarrow ac \leq bc}$$

2.1.3 Compatibilité de la multiplication par un NEGATIF

$$\boxed{(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-) \quad a < b \Longrightarrow ac \geq bc}$$

2.1.4 Inversion

$$\boxed{(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad 0 < a < b \Longrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}}$$

<u>Exemples classiques</u>

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x^2 \geq 0 \Longrightarrow$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x^2 + 1 \geq 1 \Longrightarrow$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

ou aussi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x^2 \geq 0 \Longrightarrow$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; e^{x^2} \geq 1 \Longrightarrow$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; e^{-x^2} \leq 1.$$

2.2 Rapport et Proportion

Si $(A, B, C, D) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
alors

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}$$

Deus fractions sont égales si le produit des moyens BC est égal au produit des extrêmes AD.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

En plus

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \implies \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D} = \frac{\lambda A}{\lambda B}$$

2.3 Equation du premier degré

L'équation $ax + b = 0$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ admet une seule solution donnée par

$$x = \frac{-b}{a}$$

2.4 Inéquation du premier degré

L'équation $ax + b > 0$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ admet comme solution l'ensemble défini par

$$S^{+} =]\frac{-b}{a}, +\infty[$$

L'équation $ax + b \geq 0$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^{*-} \times \mathbb{R}$ admet comme solution l'ensemble défini par

$$S^{-} =]-\infty, \frac{-b}{a}]$$

2.5 Equation du deuxième degré

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$
se résoud en calculant le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

il y a alors trois cas

$\underline{\Delta > 0}$

l'équation admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a alors la factorisation suivante

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

$\underline{\Delta = 0}$

l'équation admet une racines double

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

On a alors la factorisation suivante

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

$\underline{\Delta < 0}$

l'équation admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

2.6 Signe de $ax^2 + bx + c$

Pour connaître le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, on passe, une fois de plus, par le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

il y a alors trois cas :

<u>$\Delta > 0$</u>
Le signe du trinôme est alors le même que celui du coefficient a, à l'exterieur des racines x_1 et x_2.
il a le signe de $-a$ entre les racines.
<u>$\Delta = 0$</u>
Dans ce cas, on a

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Il a donc le signe de a si $x \neq \frac{-b}{2a}$.

<u>$\Delta < 0$</u>
Le trinôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, il a donc un signe constant, le même que celui de a.

2.7 Les identités remarquables

Elles peuvent servir à factoriser une expression en vue d'étudier **son signe**.

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Sans oublier la formule du binôme

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Et tant qu'on y est, rappelons la formule de Leibnitz, qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

2.8 Partie entière

Par définition la partie entière $E(x)$ d'un réel x, est l'unique entier relatif qui vérifie :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Par exemple, $E(3,00001) = 3$ et $E(-4,000001) = -5$.

On a aussi les encadrements utiles suivants :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x - 1 < E(x) \leq x$$

et

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ 0 \leq x - E(x) < 1$$

2.9 Valeur absolue

Par définition, la valeur absolue, notée $|x|$, d'un réel x vérifie

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } -x \text{ si } x \leq 0$$

Elle possède les propriétés suivantes

1. La positivité

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |x| \geq 0 \text{ et } |x| = 0 \iff x = 0$$

2. La symétrie

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |x| = |-x|$$

3. l'inégalité triangulaire

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ |x + y| \leq |x| + |y|$$

4. l'inégalité triangulaire deuxième forme

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

2.10 Racine $n^{\text{ième}}$ et exposant réel.

En utilisant la propriété de la borne supérieure, on montre que

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ \ (\forall a > 0)\ \ (\exists\,!\, x \in \mathbb{R})\ \ : x^n = a}$$

cet unique x est noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Lorsque l'exposant est un entier, nous pouvons définir x^n pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Mais Si l'exposant n'est pas un entier, la base doît impérativement être strictement positive.

Dans ce cas :

$$(\forall x > 0)\ \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

On a alors les règles suivantes

$$(\forall x > 0)\ \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \ x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$(\forall x > 0)\ \ (\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R})\ \ (x^\alpha)^\gamma = x^{\alpha\gamma}$$

$$(\forall x > 0)\ \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$(\forall x > 0)\ \ x^0 = 1$$

2.11 Formules trigonométriques

Nous allons juste rappeler les principales identités à partir desquelles, on peut déduire les autres formules. Soient x et y deux réels quelconques et z un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

2.12 Formules hyperboliques

Rappelons les définitions du cosinus, du sinus et de la tangente hyperboliques

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \ \ th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

Les formules hyperboliques s'obtiennent à partir des formules trigonométriques en remplaçant

$$\cos \text{ par } ch$$

et

$$\sin \text{ par } \frac{sh}{i}.$$

i étant le nombre complexe défini par $i^2 = -1$.

Par exemple,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ devient } ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

$$tg(a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a)tg(b)} \text{ devient } th(a+b) = \frac{th(a) + th(b)}{1 + th(a)th(b)}$$

2.13 Equations trigonométriques

Premier type : $\cos(X) = \cos(a)$
il y a deux types de solutions

$$X = a + 2k\pi \text{ ou } X = -a + 2k\pi$$

Exemple
L'équation

$$\cos(2x - 1) = \cos(\frac{\pi}{3})$$

a pour solution

$$2x - 1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x - 1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

c'est à dire

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Deuxième type : $\sin(X) = \sin(a)$
il y a deux types de solutions

$$X = a + 2k\pi \text{ ou } X = \pi - a + 2k\pi$$

Troisième type : $\tan(X) = \tan(a)$
il y a un seul type de solutions

$$X = a + k\pi$$

2.14 Inéquations trigonométriques

La méthode le plus efficace pour résoudre une inéquation trigonométrique, consiste à passer par le cercle trigonométrique.

Chapitre 3

Langage de la théorie des ensembles

3.1 Les mots du langage des mathématiques

On pourrait dire que les mathématiques est un langage, dont les mots sont des symboles et les phrases sont des propositions. L'avantage de ce langage, c'est qu'il permet d'énoncer des VERITES ABSOLUES qui ne dépendent plus du temps. Il y a des vérités qui découlent directement de la réalité observable (TVI, Rolle, ...), mais aussi des vérités imaginaires ou abstraites ($e^{i\pi} + 1 = 0, ...$).

Symbole	Sa signification
$\emptyset$	l'ensemble VIDE
$\forall$	Quelque soit ou pour tout
$\exists$	il existe au moins
$\exists\,!$	il existe un et un seul
$\in$	appartient à
$\subset$	est inclus dans
$\cap$	intersection
$\cup$	union
$\Longrightarrow$	implique = entraîne
$\Longleftrightarrow$	équivalent

Remarque sur l'ordre des quantificateurs

Les deux propositions "$(\forall x \in A)\;\;(\exists y \in B)\;\;:\;\;P_{x,y}$"
et "$(\exists y \in B)\;\;/\;\;(\forall x \in A)\;\;P_{x,y}$" SONT DIFFERENTES.

Pour la première, à chaque élément x de A, il existe un élément y de B, QUI DEPEND DE x.

Pour la deuxième, il existe un élément y de B fixé une fois pour toute.

$\boxed{\Longrightarrow \text{ est le symbole le plus utile en maths}}$

C'est grace à ce symbole que l'on progresse, que l'on déduit d'autres vérités (THEOREMES.)

3.2 Exemple de phrases du Langage de la théorie des ensembles

On rappelle les définitions suivantes :

Soient A et B deux parties d'un certain ensemble E.

$$A \cap B = \{x \in E \quad : \quad x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in E \quad : \quad x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A \subset B \iff (\forall x \in A) \;\; x \in B$$

Pour montrer que $A \subset B$, on prend un élément x quelconque de l'ensemble A et l'on montre qu'il appartient à l'ensemble B.

$$A = B \iff A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A$$

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, il suffit de montrer que chacun d'entre eux est inclus dans l'autre.

Langage commun	Langage mathématique
Tous les entiers naturels sont positifs	$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geq 0$
Le carré de tout réel est positif	$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x^2 \geq 0$
Entre deux réels quelconques, il y a au moins un rationnel	$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ \exists r \in \mathbb{Q}\ \ :\ x < r < y$
Tout réel strictement positif admet une seule racine $n^{\text{ième}}$	$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ (\exists ! y \in \mathbb{R}^{+*})\ :\ y^n = x$
La fonction f est continue au point a	$\lim\limits_{x \to a, x \in D_f} f(x) = f(a)$
La fonction f est dérivable au point a	$\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$
L'application f définie de E vers F est injective	$(\forall (x,y) \in E^2)\ \ f(x) = f(y) \implies x = y$
L'application f définie de E vers F est surjective	$(\forall y \in F)\ \ (\exists x \in E)\ :\ f(x) = y$
L'application f définie de E vers F est bijective	$(\forall y \in F)\ \ (\exists\,!\, x \in E)\ :\ f(x) = y$
Aller de a à b est plus court que d'aller de a à c puis de c à b	$(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3)\ \ \|a-b\| \leq \|a-c\| + \|c-b\|$

Chapitre 4

La logique binaire

Une proposition est soit vraie (valeur logique = 1), soit fausse (valeur logique = 0). Si elle est vraie, sa négation est fausse. Si elle est fausse, sa négation est vraie, il n'y a aucun DOUTE. C'est grace à cette logique binaire que les maths avancent.

4.1 La Négation

P	NON $P = \overline{P}$
1	0
0	1
$(\forall x \in E)\ \ Q$	$(\exists x \in E)\ \ :\ \overline{Q}$
$(\forall x \in E)\ \ :\ \ P,\ \ Q$	$(\exists x \in E)\ \ :\ P$ et $\overline{Q}$
$(\forall x \in E)\ \ (P \implies Q)$	$(\exists x \in E)\ \ :\ P$ et $\overline{Q}$
$(\exists x \in E)\ :\ Q$	$(\forall x \in E)\ \ \overline{Q}$
$(\forall x \in E)\ (\exists y \in F)\ :Q$	$(\exists x \in E)\ \ :\ (\forall y \in F)\ \ \overline{Q}$
$(\forall x \in E)\ \ (\exists y \in F)\ :\ (Q \implies R)$	$(\exists x \in E)\ \ :\ (\forall y \in F)\ \ Q$ et $\overline{R}$
$(\exists x \in E)\ :\ (\forall y \in F)\ (Q \implies R)$	$(\forall x \in E)\ \ (\exists y \in F)\ \ :\ Q$ et $\overline{R}$

Le point fort des mathématiques, qui les distingue des autres sciences, vient de cette logique binaire qui stipule qu'une proposition mathématique est soit Vraie soit Fausse et jamais les deux à la fois.

En d'autres termes, toute proposition admet une seule VALEUR LOGIQUE : 0 ou 1.

Dans tout langage, qui transmet un message, on a parfois besoin de distinguer (ou) , d'englober (et), de généraliser (quelque soit) et enfin de spécifier (il existe).

4.2 Le "ou" Logique inclusif

Lorsque l'on dit "P ou Q", ça veut dire que l'une au moins des deux propositions est vraie.

P	Q	P ou Q la disjonction inclusive
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4.3 Le "ou" Logique exclusif

Lorsque l'on dit : "soit P, soit Q", ça veut dire que l'une des deux propositions est vraie et que l'autre est fausse.

P	Q	soit P, soit Q : la disjonction exclusive
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4.4 Le "et" Logique

Lorsque l'on dit "P et Q", ça veut dire que les deux propositions sont vraies.

P	Q	la conjonction P et Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4.5 L'implication

Lorsque l'on écrit, $P \Longrightarrow Q$, ça sous-entend que si la proposition P est vraie, alors , à coup sûr, la proposition Q est aussi vraie.

$P \Longrightarrow Q$	P	Q
1	1	1
1	0	????
0	1	????
0	0	????

Pratiquement, TOUS les théorèmes ont la structure suivante :

$$\boxed{H_1 \text{ et } H_2 \text{ et } ...H_n \quad \Longrightarrow C}$$

Qui se traduit par
Si les hypothèses H_1 et H_2 et $...H_n$ sont satisfaites, alors la conclusion C est vraie.
Exemple : Le théorème de la limite monotone

$$(u_n) \text{ croissante et majorée} \quad \Longrightarrow (u_n) \text{ est convergente}$$

Exemple : Le théorème de Rolle

$$f \text{ continue sur } [a,b] \text{ et } f \text{ dérivable sur }]a,b[\text{ et } f(a) = f(b) \Longrightarrow (\exists c \in]a,b[) \ : \ f'(c) = 0)$$

4.6 L'équivalence entre deux propositions

Lorsque l'on écrit, $P \iff Q$, ça sous-entend que si la proposition P est vraie, alors , à coup sûr, la proposition Q est aussi vraie et INVERSEMENT ou RECIPROQUEMENT, si P est fausse, alors , à coup sûr, la proposition Q est fausse aussi. Deux propositions équivalentes ont la même valeur logique.

$P \iff Q$	P	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	????
0	0	????

Chapitre 5

Les Raisonnements DEDUCTIFS

Un raisonnement déductif est un processus logique qui permet, d'aboutir à coup sûr à la véracité d'une certaine proposition.

Par exemple, le raisonnement par récurrence, permet de dire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il ne faut pas croire que les raisonnements déductifs sont en nombre infini.

En gros, il n'y a qu'une dizaine de façons de raisonner.

5.1 Par quoi commencer ?

5.1.1 La proposition à montrer commence par le quantificateur universel $\forall$

Supposons par exemple que l'on veuille montrer que

$$(\forall \epsilon > 0).....$$

Notre raisonnement devrait commencer par

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.

Exemple

On se propose de montrer, à l'aide de la définition de la limite d'une suite que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0.$$

C'est à dire que l'on veut montrer que

$$(\forall \epsilon > 0) \;\; (\exists N \in \mathbb{N}) \;\; : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \Big(n \geq N \implies e^{-n} < \epsilon\Big).$$

Voici comment raisonner :

Soit $\epsilon > 0$ quelconque.

On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \Big(n \geq N \implies n > -\ln(\epsilon)\Big).$$

Il suffit alors de prendre par exemple

$$N = E(-\ln(\epsilon)) + 1.$$

5.1.2 La proposition à montrer commence par le quantificateur existentiel $\exists$

Supposons par exemple que l'on veuille montrer que

$$(\exists x \in A) : .....$$

c'est ce que l'on appelle une question d'existence.

Pour montrer l'existence d'un tel élément, soit nous disposons d'un théorème type (Théorème des valeurs intermédiaires , Théorème de Rolle, ...) qui assure cette existence. Sinon, il faudra construire cet élément.

(Voir par exemple la démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.)

5.2 Le raisonnement Direct

C'est peut être le raisonnement le plus utilisé . Il a la structure suivante :

$$\boxed{\text{on a ... \quad DONC ...}}$$

Le DONC en question DOIT ETRE obligatoirement JUSTIFIE PAR UN AXIOME, UNE REGLE DE CALCUL, UNE REGLE DE COMPARAISPON, UNE DEFINITION OU UN THEOREME.

Exemple

Montrer que

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}) \ \ a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

qui traduit la fameuse inégalité selon laquelle, la moyenne Arithmétique est supérieure à la moyenne Géométrique.

Pour la démonstration, utilisons la raisonnement direct.

On a

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}) \ \ a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Donc

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}) \ \ a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

5.3 Par récurrence

Ce raisonnement est sûrtout utilisé pour démontrer la véracité d'une proposition du type

$$\boxed{(\forall n \geq n_0) \;\; P_n}$$

où n_0 est un entier naturel et P_n une propriété qui dépend de l'entier n.
On procède alors comme suit :
Initialisation
On vérifie que la propriété P_{n_0} est satisfaite.
Hérédité
On prend un entier $n \geq n_0$ tel que P_n soit vraie, et on montre alors que la propriété P_{n+1} est aussi vraie.
On conclue que P_n est vraie pour tout entier n.
Exemple
Il s'agit de monter que

$$(\forall n \geq 1) \;\; 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ici, P_n, c'est l'égalité $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Initialisation

$$P_1 \;\; : \;\; 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

Donc P_1 est vraie.
Hérédité
Soit $n \geq 1$ tel que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(ce qu'on appelle l'HYPOTHESE DE RECURRENCE.)
Montrons que P_{n+1} est vraie .
En d'autres termes, a-t-on l'égalité

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}?$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\Big(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\Big) = (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

CONCLUSION
La propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

5.4 Par l'absurde

Il s'agit de montrer qu'une certaine proposition P est vraie.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est <u>FAUSSE</u> et d'aboutir, à l'aide d'inductions logiques à une proposition fausse ou à une contradiction. On en déduit alors que P est nécessairement <u>VRAIE</u>.

Exemple

Montrons en utilisant le raisonnement par l'absurde que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

supposons que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow (\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}) \quad : \quad \frac{p}{q} = \sqrt{5} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.} \\
\Longrightarrow p^2 = 5q^2 \\
\Longrightarrow 5 \text{ divise } p^2 \\
\Longrightarrow 5 \text{ divise } p \\
\Longrightarrow (\exists p' \in \mathbb{N}) \quad : \quad p = 5p' \\
\Longrightarrow 25p'^2 = 5q^2 \\
\Longrightarrow 5p'^2 = q^2 \\
\Longrightarrow 5 \text{ divise } q^2 \\
\Longrightarrow 5 \text{ divise } q \\
\Longrightarrow 5 \text{ divise à la fois } p \text{ et } q
\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.

L'hypothèse $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ est donc fausse, ce qui veut dire que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

5.5 Par contre exemple

Il s'agit de montrer que la proposition P suivante est fausse.

$$P : (\forall x \in E) \quad Q_x$$

E est un certain ensemble et Q_x une propriété qui pourrait dépendre de x.

On montre alors la négation

$$\overline{P} \ : \ (\exists x \in E) \quad : \ \overline{Q_x}.$$

Le raisonnement par contre-exemple consiste à présenter un élément y de E tel que Q_y soit fausse.

On en déduit que P est alors fausse.

Exemple

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2^{2^n} + 1 \text{ est premier}$$

Il suffit de remarquer que $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ n'est pas premier vu qu'il est divisible par 641.

5.6 Par analyse-synthèse

Il s'agit de montrer qu'une certaine proposition P est vraie.

L'ANALYSE consiste à montrer que si P est vraie, alors nécessairement une certaine proposition Q est vraie.

La SYNTHESE sert normalement à vérifier que Q est une condition suffisante : $Q \Longrightarrow P$

Exemple

On voudrait montrer que la proposition P suivante est vraie .

P : Toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est somme d'une application g paire et d'une application h impaire.

L'analyse consiste à supposer que P est vraie et d'en déduire des conditions nécessaires.

$$P \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = g(x) + h(x)$$

$$\Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

$$\Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \;\; g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

L'analyse montre que si f est somme d'une application g paire et d'une application h impaire, alors nécessairement

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La synthèse consiste à vérifier que ces conditions sont aussi suffisantes.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

$$\Longrightarrow g \text{ est paire }, h \text{ est impaire et que } f(x) = g(x) + h(x).$$

Conclusion

Toute application f peut s'écrire comme somme d'une application g paire et d'une application h impaire

définie par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Remarque

Le même raisonnement peut être utilisé pour montrer que toute matrice carrée est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

5.7 Par contraposée

Ce raisonnement est surtout utilisé lorsqu'il est plus pratique de manipuler les négations.
Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante

$$\boxed{P \implies Q \iff \overline{Q} \implies \overline{P}}$$

Ce qui veut dire que pour montrer que la proposition P entraîne la proposition Q, il suffit de montrer que la négation de Q implique la négation de P.
Exemple

Soit n un entier naturel. Montrer que

$$n^2 \text{ est impair } \implies n \text{ est impair}$$

Observons qu'il est beaucoup plus facile de montrer que

$$n \text{ est pair } \implies n^2 \text{ est pair}$$

5.8 Par contraposée partielle

Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante

$$\boxed{(P \text{ et } Q \implies R) \iff (P \text{ et } \overline{R} \implies \overline{Q})}$$

On peut facilement vérifier cette équivalence à l'aide de la table de vérité.

Exemple

Soit (u_n) une suite réelle.
Montrons que

$$(u_n) \text{ croissante et } (u_n) \text{ non majorée } \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Nous allons plutôt montrer que

$$(u_n) \text{ croissante et } \lim_{n\to+\infty} u_n \neq +\infty \implies (u_n) \text{ est majorée .}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq +\infty \implies$$

$$(\exists A > 0) \ : \ (\forall N \in \mathbb{N}) \ (\exists n \geq N) \ u_N \leq u_n \leq A \implies$$

$$(\exists A > 0) \ : \ (\forall N \in \mathbb{N}) \ u_N \leq A \implies$$

$$(u_n) \text{ est majorée par } A.$$

5.9 Par disjonction des cas

Il s'agit de traiter tous les cas posssibles.
Exemple Montrer que
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n(n+1) \text{ est pair}$$
Soit n un entier naturel. Il y a deux possibilités

1. <u>n est pair.</u>

$$n \text{ pair} \implies (\exists k \in \mathbb{N}) \quad : \quad n = 2k \implies n(n+1) = 2k(2k+1) \implies n(n+1) \text{est pair}$$

2. <u>n est impair.</u>

n impair $\implies (\exists k \in \mathbb{N}) \quad : \quad n = 2k+1 \implies n(n+1) = (2k+1)(2k+2) \implies n(n+1) = 2(k+1)(2k+1) \implies n(n+1)$est pair

5.10 Par équivalence

Il s'agit de montrer que la proposition P est équivalente à la proposition Q, sans avoir à montrer les deux implications : $P \implies Q$ et $Q \implies P$.
Exemple
Pour montrer que deux sous ensembles A et B d'n ensemble E, sont égaux, il suffit de montrer que
$$(\forall x \in E) \quad x \in A \iff x \in B$$
On évite ainsi de montrer que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

5.11 En partant d'une idée

Il s'agit de considérer un objet mathématique (élément, ensemble, fonction, ...) et de raisonner sur cet élément.
C'est de loin le raisonnement le plus difficile, car il demande de l'imagination, et beaucoup d'expérience.
Exemple
On voudrait montrer que le nombre $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
Dans un premier temps, supposons que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ c'est à dire que
$$(\exists (p, q_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) \quad : \quad q_0\sqrt{5} = p.$$
L'IDEE, c'est de considérer L'ENSEMBLE A suivant
$$A = \{q \in \mathbb{N}^* \quad : \quad q\sqrt{5} \in \mathbb{N}\}$$
Par notre hypothèse, $A \neq \emptyset$ car $q_0 \in A$.
Or A est une partie de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément que l'on notera α.
On a donc

$$0 < (\alpha\sqrt{5} - 2\alpha) < \alpha \text{ et } (\alpha\sqrt{5} - 2\alpha)\sqrt{5} = 5\alpha - 2\alpha\sqrt{5} \in \mathbb{N}$$

Ce qui constitue une contradiction car $(\alpha\sqrt{5} - 2\alpha)$ serait un élément de A strictement plus petit que α.

On en déduit que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.