

SMIA 1

POLYCOPIE A CARACTERE DIDACTIQUE :

Question-Réponse type FAQ

Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
a.hammam@fs.umi.ac.ma

Vos remarques seront les bienvenues.

Table des matières

1	Propriétés de l'ensemble \mathbb{R} et des réels	7
1.1	Le théorème fondamental de l'analyse réelle	7
1.2	Propriété de la borne supérieure	8
1.3	Caractérisation de la borne supérieure	9
1.4	Caractérisation de la borne inférieure	9
1.5	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure	9
1.6	Caractérisation séquentielle de la borne inférieure	9
1.7	Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}	10
1.8	Caractérisation séquentielle de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}	10
2	Les suites réelles	11
2.1	Comment étudier la monotonie d'une suite	11
2.1.1	Comment montrer qu'une suite est croissante	11
2.1.2	Comment montrer qu'une suite est décroissante	12
2.2	Suites majorées, minorées et bornées	12
2.2.1	Comment montrer qu'une suite est majorée	13
2.2.2	Comment montrer qu'une suite est minorée	14
2.2.3	Comment montrer qu'une suite est bornée	14
2.3	Comment calculer la limite d'une suite	14
2.3.1	Calcul par passage	14
2.3.2	Calcul par Encadrement	15
2.3.3	Formes indéterminées	15
2.3.4	Utilisation de l'expression conjuguée	15
2.4	Comment étudier la nature d'une suite	16
2.4.1	Comment montrer qu'une suite (u_n) est convergente	16
2.4.2	Comment montrer qu'une suite (u_n) est divergente	17
2.4.3	Comment montrer que deux suites sont adjacentes	17
2.4.4	Comment montrer qu'une suite est de Cauchy	18
2.4.5	Comment montrer qu'une suite (u_n) n'est pas de Cauchy	18
2.5	Suites récurrentes	18
2.5.1	Comment étudier une suite récurrente première forme	18
2.5.2	Comment étudier une suite récurrente deuxième forme	22

3	Les fonctions	25
3.1	Comment déterminer le domaine de définition d'une fonction	25
3.1.1	Le dénominateur doit être non nul.	25
3.1.2	Ce qui est sous la racine doit être positif.	25
3.1.3	L'argument du logarithme doit être STRICTEMENT positif.	26
3.1.4	L'argument de l'arccos ou de l'arcsin doit être dans $[-1, 1]$	26
3.1.5	L'argument de la tangente doit être dans $\cup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + (k + 1)\pi[$	26
3.1.6	L'argument de l'argch doit être dans $[1, +\infty[$	27
3.2	Comment étudier la parité d'une fonction	27
3.2.1	Fonction paire	27
3.2.2	Fonction impaire	27
3.2.3	Courbe admettant un axe de symétrie	27
3.2.4	Courbe admettant un centre de symétrie	27
4	Limite d'une fonction réelle	29
4.1	Définition générale de la limite d'une fonction	29
4.2	Comment calculer la limite d'une fonction	30
4.2.1	Par passage à la limite	30
4.2.2	Par Encadrement	31
4.2.3	Par composition	32
4.2.4	En utilisant le théorème des accroissements finis	33
4.2.5	Comment montrer que la limite d'une fonction existe sans calcul	34
4.3	Comment montrer que la limite d'une fonction en un point n'existe pas	34
4.3.1	La limite à droite est différente de La limite à gauche	34
4.3.2	Par la caractérisation séquentielle de la limite	35
5	La continuité des fonctions réelles	37
5.1	Comment étudier la continuité d'une fonction	37
5.1.1	Continuité d'une fonction bien connue	37
5.1.2	Continuité d'une fonction définie par morceaux	37
5.1.3	Comment montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a	37
5.2	Continuité uniforme	40
5.2.1	Comment Montrer qu'une fonction est uniformément continue	40
5.2.2	Comment Montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur A	41
6	La dérivabilité des fonctions réelles	43
6.1	Comment étudier la dérivabilité d'une fonction	43
6.1.1	Dérivabilité d'une fonction bien connue	43
6.1.2	Dérivabilité d'une fonction définie par morceaux	44
6.1.3	Dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1}	44
6.2	Comment étudier les variations d'une fonction	44
6.2.1	En étudiant le signe du taux d'accroissement	44
6.2.2	En étudiant le signe de la dérivée	45
6.3	Résolution d'équations	46
6.3.1	Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$	46
6.3.2	Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $]a, b[$	47

6.3.3	Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus n solutions dans $[a, b]$	48
6.3.4	Exemple de résolution numérique	48

Chapitre 1

Propriétés de l'ensemble \mathbb{R} et des réels

Pour ne pas trop compliquer les choses, nous dirons simplement que l'ensemble \mathbb{R} , est un ensemble qui contiendrait tous les nombres que l'on peut écrire en utilisant les chiffres de 0 à 9, les signes + et -, ainsi que la virgule.

Pour nous qui faisons de l'analyse réelle, l'ensemble \mathbb{R} , contient les entiers naturels ($\in \mathbb{N}$,) les entiers relatifs ($\in \mathbb{Z}$,) les rationnels ($\in \mathbb{Q}$,) et les irrationnels ($\notin \mathbb{Q}$).

1.1 Le théorème fondamental de l'analyse réelle

$(\mathbb{R}, +, \times, <)$ est un corps totalement ordonné qui possède la propriété de la borne supérieure
--

** Les axiomes du corps (propriétés des lois + et \times) définissent les règles à respecter lorsque l'on fait des calculs, c'est à dire lorsque l'on effectue les opérations +, \times , -, ;.

** Les axiomes de l'ordre (propriétés de <), fixent les règles de comparaison à respecter lorsque l'on manipule les symboles <, \leq , >, \geq .

** La propriété de la borne supérieure, c'est elle qui différencie l'ensemble \mathbb{R} de l'ensemble \mathbb{Q} . Elle rend l'ensemble \mathbb{R} complet, sachant que \mathbb{Q} ne l'est pas !

Ce Théorème (TFAR) constitue le point de départ de l'analyse réelle. Il est à la base de toutes les propriétés de \mathbb{R} et de tous les théorèmes classiques de l'analyse réelle, à savoir :

La propriété d'Archimède de l'ensemble \mathbb{R} .

La densité de l'ensemble \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Le théorème de la limite monotone.

Le théorème des suites adjacentes.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La complétude de l'ensemble \mathbb{R} .

Les critères de Cauchy (des suites et des fonctions).

Le théorème des valeurs intermédiaires.

Le théorème des valeurs extérieures

Le théorème de la bijection.

Le théorème de la borne.

Le théorème de Heine.

Le théorème de Rolle.

Le théorème des accroissements finis.

La connaissance de ces théorème est non seulement la clé pour répondre aux questions posées à l'examen, mais surtout, pour suivre sans aucun problèmes les cours d'analyse des années prochaines incha Allah.

1.2 Propriété de la borne supérieure

Tout partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure

Qui se traduit par

$$(\forall A \subset \mathbb{R}) \quad A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ majorée} \implies \sup A \in \mathbb{R}$$

Cette propriété n'est pas vraie dans \mathbb{Q} .

Prenons $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. A est une partie non vide majorée de \mathbb{Q} mais A n'admet pas de borne supérieure car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

De même, \mathbb{R} possède la propriété de la borne inférieure suivante :

Tout partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure

Qui se traduit par

$$(\forall A \subset \mathbb{R}) \quad A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ minorée} \implies \inf A \in \mathbb{R}$$

1.3 Caractérisation de la borne supérieure

M est la borne supérieure de A si et seulement si M est le plus petit des majorants de A . ce qui signifie que si $\epsilon > 0$, $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de A . Ceci se traduit mathématiquement par

$$M = \sup A \iff (\forall x \in A) x \leq M \text{ et } (\forall \epsilon > 0) (\exists a \in A) : M - \epsilon < a \leq M$$

1.4 Caractérisation de la borne inférieure

m est la borne inférieure de A si et seulement si m est le plus grand des minorants de A . ce qui veut dire que si $\epsilon > 0$, $m + \epsilon$ n'est pas un minorant de A . C qui donnee

$$m = \inf A \iff (\forall x \in A) x \geq m \text{ et } (\forall \epsilon > 0) (\exists a \in A) : m \leq a < m + \epsilon$$

1.5 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

C'est une condition nécessaire et suffisante qui fait appel aux suites. Elle est obtenue en remplaçant ϵ ci-dessus par $\frac{1}{n}$.

$$M = \sup A \iff (\forall x \in A) x \leq M \text{ et } (\forall n > 0) (\exists a_n \in A) : M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$$

$$\iff (\forall x \in A) x \leq M \text{ et } \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : M = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

On en déduit que

M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A qui est en même temps limite d'une suite d'éléments de A .

1.6 Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A une partie non vide minorée de \mathbb{R} et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf A \iff (\forall x \in A) x \geq m \text{ et } (\forall n > 0) (\exists a_n \in A) : m \leq a_n < m + \frac{1}{n}$$

$$\iff (\forall x \in A) x \geq m \text{ et } \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : m = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Ce qui permet de dire que

m est la borne inférieure de A si et seulement si m est un minorant de A qui est en même temps limite d'une suite d'éléments de A .

1.7 Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Entre deux réels quelconques, il existe une infinité de rationnels.

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : x < y \ (\exists r \in \mathbb{Q}) : x < r < y.$$

1.8 Caractérisation séquentielle de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff (\forall x \in \mathbb{R}) \ (\exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) : x = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$$

Chapitre 2

Les suites réelles

Une suite réelle est une application de \mathbb{N} vers \mathbb{R} .

2.1 Comment étudier la monotonie d'une suite

2.1.1 Comment montrer qu'une suite est croissante

De façon directe

Il faut montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \geq u_n$$

ce qui est équivalent à

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

ou bien si $u_n > 0$, on montre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Exemple Montrer que la suite récurrente (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n + n^2.$$

est croissante.

De façon directe, on

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$$

donc (u_n) est croissante.

Par récurrence

On montre par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_{n+1}$$

Exemple

Montrer que la suite récurrente (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n + 1}.$$

est croissante sachant que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 2.$$

Montrons par récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_{n+1}$$

On a

$$u_1 = 1 \implies u_0 \leq u_1.$$

Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n+1} &\implies 0 < 1 + u_n \leq 1 + u_{n+1} \implies \frac{1}{1 + u_{n+1}} \leq \frac{1}{1 + u_n} \\ &\implies 2 - \frac{1}{1 + u_n} \leq 2 - \frac{1}{1 + u_{n+1}} \implies u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

CQFD.

—— Voir la section sur les Suites Récurrentes ———

2.1.2 Comment montrer qu'une suite est décroissante

Il faut montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n$$

ce qui est équivalent à

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

ou bien si $u_n > 0$, on montre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

2.2 Suites majorées, minorées et bornées

Il serait utile de connaître les majorations suivantes

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin(x)| \leq |x|$$

$$(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]) \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{-x^2} \leq 1$$

$$(\forall (x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \quad \frac{1}{a^2 + x^2} \leq \frac{1}{a^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \operatorname{ch}(x) \geq 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{1}{1 + x^2} \leq 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\operatorname{arctg}(x)| < \frac{\pi}{2}$$

2.2.1 Comment montrer qu'une suite est majorée

De façon directe

Il faut montrer que

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq M$$

On peut, montrer directement que

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \quad : \quad (\forall n \geq N) \quad u_n - M \leq 0$$

Exemple Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{3 + \cos(n)}{n^2 + 5}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part $\cos(n) \leq 1 \implies 3 + \cos(n) \leq 4$. D'autre part $0 < 5 \leq n^2 + 5 \implies \frac{1}{n^2 + 5} < \frac{1}{5}$.

On en déduit que

$$u_n \leq \frac{4}{5}.$$

Par récurrence

Cette méthode marche surtout lorsque l'on connaît le majorant M .

On montre alors, facilement, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq M$$

Exemple

Soit (u_n) une suite récurrente associée à une fonction $f : I \rightarrow I$ croissante. Si L est un point fixe de f et que $u_0 \leq L$, alors on montre Facilement par récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq L$$

2.2.2 Comment montrer qu'une suite est minorée

Il faut montrer que

$$(\exists m \in \mathbb{R}) \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq m$$

On peut, montrer directement que

$$(\exists m \in \mathbb{R}) \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - m \geq 0$$

Ou bien utiliser le raisonnement par récurrence.

2.2.3 Comment montrer qu'une suite est bornée

Il faut montrer qu'elle est à la fois majorée et minorée ou que

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \quad : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq M$$

Exemple

si

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1 + \sin(n) + e^{-n}$$

alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq 3$$

2.3 Comment calculer la limite d'une suite

2.3.1 Calcul par passage

Dans l'expression du terme général u_n pour n assez grand, on remplace n par $+\infty$.

$$\boxed{(\forall n \geq N) \quad u_n = v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L}$$

Exemples :

$$(\forall n \geq 1000) \quad u_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$(\forall n \geq 100) \quad u_n = 3 + \frac{\ln(n)}{n} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$(\forall n \geq 10) \quad u_n = e^n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2.3.2 Calcul par Encadrement

$$(\forall n \geq N) u_n < v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L_2 \implies L_1 \leq L_2$$

$$(\forall n \geq N) u_n < v_n < w_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$$

$$(\forall n \geq N) u_n < v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$(\forall n \geq N) u_n < v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exemples :

$$(\forall n \geq 100) 5 - \frac{2}{n} < u_n < 5 + \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$$

$$(\forall n \geq 1000) n - \frac{2}{n} < u_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$(\forall n \geq 10) u_n < \frac{-n^2 + 1}{n + 2} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

2.3.3 Formes indéterminées

Forme indéterminée	Méthode à appliquer
$\frac{0}{0}$	Factoriser et simplifier
$\frac{\infty}{\infty}$	Factoriser et simplifier
$\infty - \infty$	Factoriser ou le conjugué
1^∞ et 0^0	Remplacer A^B par $e^{B \ln(A)}$

2.3.4 Utilisation de l'expression conjuguée

Le conjugué de $A - B$, c'est $A + B$.

Le conjugué de $A + B$, c'est $A - B$.

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3} - n) \frac{\sqrt{n^2 + 3} + n}{\sqrt{n^2 + 3} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3} + n} = 0$$

Utilisation des sous-suites

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = L}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n+2} = L}$$

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ tend vers 0 car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

2.4 Comment étudier la nature d'une suite

2.4.1 Comment montrer qu'une suite (u_n) est convergente

1. On calcule sa limite (par passage ou par comparaison) et on trouve un nombre fini.

Pour cela, on aura besoin de connaître les Limites Usuelles Très Utiles et les opérations sur les limites. —————

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{tg}(\frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(1 - \cos(\frac{1}{n})) = \frac{1}{2}.$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x} = 0.$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha e^{-n} = 0.$$

2. On montre qu'elle est croissante majorée. Donc elle converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
3. On montre qu'elle est décroissante minorée. Donc elle converge vers $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
4. On montre qu'elle est encadrée par deux suites qui convergent vers la même limite L .
Donc (u_n) convergera vers L .
5. On montre que (u_n) et une autre suite (v_n) sont adjacentes.
6. On montre que

$$(\exists(L, N) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}) : (\forall n \geq N) |u_n - L| \leq v_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. La suite (u_n) aura ainsi L comme limite.

7. On montre que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite.
 (u_n) convergera vers cette limite commune.
8. On montre qu'elle est de Cauchy.

2.4.2 Comment montrer qu'une suite (u_n) est divergente

1. On calcule sa limite (par passage ou par comparaison) et on trouve $\pm\infty$.
2. On montre qu'elle est croissante NON majorée. Donc sa limite sera $+\infty$.
3. On montre qu'elle est décroissante NON minorée. Donc sa limite sera $-\infty$.
4. On montre qu'elle est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$. Donc sa limite sera $+\infty$.
5. On montre qu'elle est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$. Donc sa limite sera $-\infty$.
6. On montre qu'elle admet une sous-suite divergente.
7. On montre qu'elle admet deux sous-suites qui tendent vers deux limites différentes.
8. On montre qu'elle n'est pas de Cauchy.
9. On montre qu'elle existe une sous suite (v_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \neq 0$.

2.4.3 Comment montrer que deux suites sont adjacentes

Pour montrer que les deux suites (u_n) et v_n sont adjacentes, on commence par étudier le signe de la différence $u_n - v_n$. On tient compte du fait que la suite majorante est décroissante et que la suite minorante est croissante.

et donc, on peut connaître à l'avance, lesquelles des deux suites sera croissante.

Par suite, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > v_n \text{ implique } (u_n) \text{ décroissante et } (v_n) \text{ croissante}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n \text{ implique } (u_n) \text{ croissante et } (v_n) \text{ décroissante}$$

Exemple

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

Il est clair que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n$$

Par conséquent, (u_n) sera croissante et (v_n) sera décroissante.
Il reste en fin, à vérifier que leur différence tend vers 0.

2.4.4 Comment montrer qu'une suite est de Cauchy

1. On utilise la définition (en général, ce n'est pas évident)
2. On montre qu'elle est convergente.
3. On montre la condition suffisante suivante :

$$(\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2) \quad |u_{n+p} - u_n| \leq v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \implies (u_n) \text{ est de Cauchy}$$

2.4.5 Comment montrer qu'une suite (u_n) n'est pas de Cauchy

1. On montre qu'elle est divergente.
2. On montre qu'il existe une sous suite (v_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) \neq 0$.

2.5 Suites récurrentes

2.5.1 Comment étudier une suite récurrente première forme

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} , c'est à dire que I est soit un segment du type $[a, b]$, soit un intervalle non borné du type $[a, +\infty[$.

Une suite récurrente première forme (u_n) est définie par

$$u_0 \in I, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : I \rightarrow I$. ou bien $f(I) \subset I$. Cette condition de stabilité de I par f , est nécessaire pour que la suite (u_n) soit bien définie et que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in I.$$

Nous supposons aussi que f est continue sur I .

Limites possibles ou probables

Si la suite (u_n) converge vers un réel L , alors $L \in I$ et puisque f est supposée être continue sur I , on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(L).$$

L est donc nécessairement un point fixe de f , qui satisfait la condition $f(L) = L$.

Il se peut que f admette plusieurs point fixes. La limite éventuelle de la suite (u_n) dépend alors de la position du premier terme u_0 par rapport à ces points fixes.

Cas où f est croissante sur I

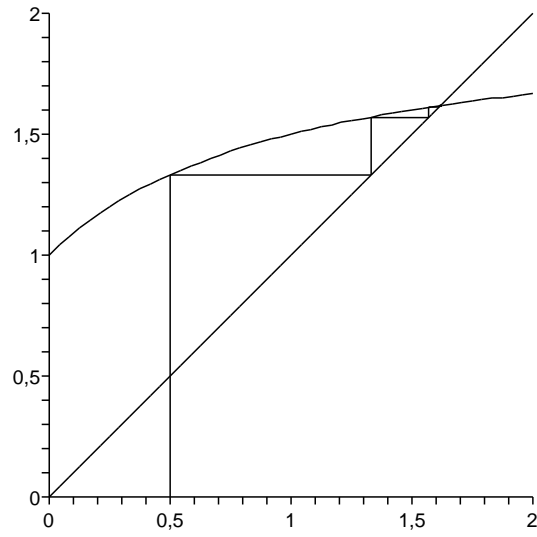


FIGURE 2.1 – Cas où f est croissante et (u_n) croissante convergente.

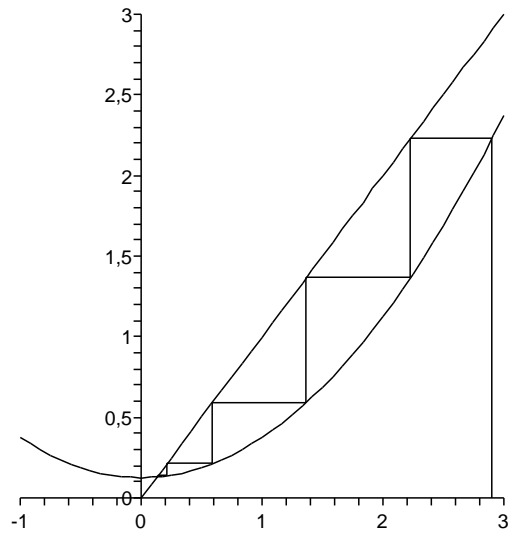


FIGURE 2.2 – Cas où f est croissante et (u_n) décroissante convergente.

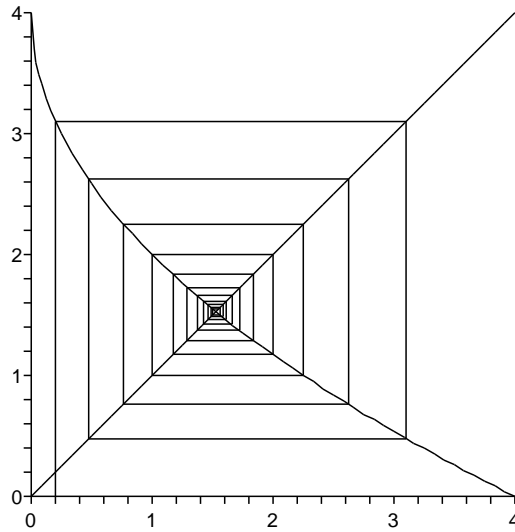


FIGURE 2.3 – Cas où f est décroissante et (u_n) CONVERGENTE.

Si f est croissante sur I , la suite (u_n) est monotone. IL SUFFIT de comparer les deux premiers termes u_0 et u_1 .

$$u_0 \leq u_1 \implies (u_n) \text{ est croissante}$$

Pour cela, Comme dans un jeu d'enfants, on montre facilement par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_{n+1}$$

$$u_0 \geq u_1 \implies (u_n) \text{ est décroissante}$$

Pour cela, Comme dans un autre jeu d'enfants, on montre facilement par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

Pour savoir si (u_n) est majorée ou minorée, il suffit de comparer u_0 avec le point fixe L .

$$u_0 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq L$$

$$u_0 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq L$$

Il n'y a pas plus simple que de raisonner, encore une fois, par récurrence.

Cas où f est décroissante sur I

Si f est décroissante sur I , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et varient en sens inverse.

IL SUFFIT de comparer les deux premiers termes u_0 et u_2 .

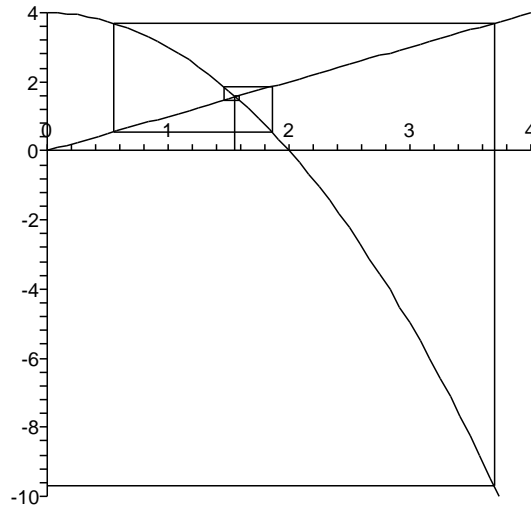


FIGURE 2.4 – Cas où f est décroissante et (u_n) DIVERGENTE.

$$u_0 \leq u_2 \implies (u_{2n}) \text{ est croissante et } (u_{2n+1}) \text{ décroissante.}$$

$$u_0 \geq u_2 \implies (u_{2n}) \text{ est décroissante et } (u_{2n+1}) \text{ croissante.}$$

$$u_0 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n} \geq L$$

$$u_1 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n+1} \geq L$$

$$u_0 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n} \leq L$$

$$u_1 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n+1} \leq L$$

COMME dans le cas où f est croissante, Toutes les propriétés précédentes, se démontrent aisément à l'aide du raisonnement par récurrence.

$$(u_n) \text{ converge} \iff (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}$$

Utilisation du théorème des accroissements finis : TAF

Soit (u_n) une suite récurrente associée à la fonction $f : I \rightarrow I$, où I est un intervalle fermé de \mathbb{R} . On suppose que L est un point fixe de f appartenant à I .

On suppose de plus que f est dérivable sur I . On a alors, d'après le TAF,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists c \in I) : u_{n+1} - L = f(u_n) - f(L) = (u_n - L)f'(c).$$

Distinguons les deux cas suivants :

1^{er} cas

$$(\forall x \in I) |f'(x)| \leq K < 1$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - L| \leq K|u_{n-1} - L| \leq K^n|u_0 - L|.$$

La suite (u_n) converge vers L .

Dans ce cas, le point fixe est dit attractif (Voir Figure 3.)

2^{ème} cas

$$(\forall x \in I) |f'(x)| \geq K > 1$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - L| \geq K|u_{n-1} - L| \geq K^n|u_0 - L|.$$

La suite (u_n) est alors divergente.

Dans ce cas, le point fixe est dit répulsif (Voir Figure 4.)

2.5.2 Comment étudier une suite récurrente deuxième forme

Une suite récurrente deuxième forme (u_n) est définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}) au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ce sont des suites (u_n) vérifiant une égalité du type

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n) \text{ avec } u_0 \text{ et } u_1 \text{ données.}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que l'on connaisse une suite particulière (v_n) qui satisfait la relation ci-dessus.

Par soustraction, on aura

$$a(u_{n+2} - v_{n+2}) + b(u_{n+1} - v_{n+1}) + c(u_n - v_n) = 0$$

Pour trouver (u_n) , il suffit alors de trouver (w_n) telle que

$$aw_{n+2} + bw_{n+1} + cw_n = 0 \quad (C)$$

Pour cela, cherchons w_n sous la forme $w_n = \alpha^n$.

En remplaçant w_n dans la condition (C), on tombe sur l'équation caractéristique suivante

$$\boxed{a\alpha^2 + b\alpha + c = 0}$$

trois cas se présentent alors

1. $\Delta > 0$

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles :

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$w_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 .

Exemple

Déterminer u_n sachant que $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

L'équation caractéristique s'écrit :

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad \Delta = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

donc

$$u_n = A + B2^n = 2^n - 1$$

2. $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet une racine double :

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

et

$$w_n = (A + Bn)\alpha^n$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 .

3. $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes :

$$\alpha_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \rho e^{i\theta} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \rho e^{-i\theta}$$

et

$$w_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 .

Chapitre 3

Les fonctions

3.1 Comment déterminer le domaine de définition d'une fonction

3.1.1 Le dénominateur doit être non nul.

Si $f(x) = \frac{1}{D(x)}$, alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : D(x) \neq 0\}.$$

On résoud alors l'équation $D(x) = 0$ pour déterminer les racines r_1, r_2, \dots .
Le domaine de définition sera alors

$$D_f = \mathbb{R} - \{r_1, r_2, \dots\}.$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 5x + 6)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 5x + 6) \neq 0\}.$$

Les solutions de l'équation $x(x^2 - 5x + 6) = 0$ sont 0, 2, et 3.
Par suite

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, 2, 3\} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[.$$

3.1.2 Ce qui est sous la racine doit être positif.

Si $f(x) = \sqrt{D(x)}$, alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : D(x) \geq 0\}.$$

On résoud alors l'inéquation $D(x) \geq 0$ pour déterminer l'ensemble S des solutions.
Le domaine de définition sera alors

$$D_f = S.$$

Exemple

$$f(x) = \sqrt{x(x^2 - 5x + 6)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 5x + 6) \geq 0\}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x(x^2 - 5x + 6) \geq 0$ est $S = [0, 2] \cup [3, +\infty[$.

Par suite

$$D_f = [0, 2] \cup [3, +\infty[.$$

3.1.3 L'argument du logarithme doit être STRICTEMENT positif.

Exemple

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 > 0\}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 5x + 4 > 0$ est $S =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$.

Par suite

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[.$$

3.1.4 L'argument de l'arccos ou de l'arcsin doit être dans $[-1, 1]$.

Exemple

$$f(x) = \arccos(x^2 - 5x + 5)$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2 - 5x + 5 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 5 \geq -1 \text{ et } x^2 - 5x + 5 \leq 1\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ est $S_1 =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ est $S_2 = [1, 4]$.

Par suite

$$D_f = S_1 \cap S_2 = [1, 2] \cup [3, 4].$$

3.1.5 L'argument de la tangente doit être dans $\cup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$.

Exemple

$$f(x) = \text{tg}(2x)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$$

d'où

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.1.6 L'argument de l'argch doit être dans $[1, +\infty[$.

Exemple

$$f(x) = \operatorname{argch}(x^2 - 6x + 9)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 9 \geq 1\}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ est $S =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$.

Par suite

$$D_f =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[.$$

3.2 Comment étudier la parité d'une fonction

3.2.1 Fonction paire

On montre que

$$(\forall x \in D_f) \quad f(-x) = f(x)$$

3.2.2 Fonction impaire

Il faut vérifier que

$$(\forall x \in D_f) \quad f(-x) = -f(x)$$

3.2.3 Courbe admettant un axe de symétrie

La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si

$$\boxed{(\forall x \in D_f) \quad f(a - x) = f(x)}$$

3.2.4 Courbe admettant un centre de symétrie

Le point de coordonnées (a, b) est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si

$$\boxed{(\forall x \in D_f) \quad f(2a - x) = 2b - f(x)}$$

Chapitre 4

Limite d'une fonction réelle

4.1 Définition générale de la limite d'une fonction

Soit f une fonction réelle avec D_f comme domaine de définition. Dans la plupart des cas, D_f est un intervalle.

Soit $A \subset D_f$, a un point d'accumulation de A et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l \iff (\forall V \in \mathcal{V}(l)) (\exists U \in \mathcal{V}(a)) : f(U \cap A) \subset V$$

$\mathcal{V}(l)$ et $\mathcal{V}(a)$ désignent respectivement l'ensemble des voisinages de l et de a .

Remarque

La notion de limite d'une fonction f en un point a est un concept local. En ce sens que seule l'expression

de $f(x)$ AU VOISINAGE du point a entrera en ligne de compte.

Par exemple, pour calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2, il suffit de connaître $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$. L'expression de $f(x)$ pour $x > 3$ n'aura aucune influence sur cette limite.

Nature du point	un voisinage de ce point
$a \in \mathbb{R}$	$]a - \eta, a + \eta[$ ($\eta > 0$)
$l \in \mathbb{R}$	$]a - \epsilon, a + \epsilon[$ ($\epsilon > 0$)
$a = +\infty$	$]A, +\infty[$ ($A > 0$)
$a = -\infty$	$] - \infty, B[$ ($B < 0$)

Nature de l'ensemble A	Nature de la limite
D_f	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
$D_f \setminus \{a\}$	$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$
$D_f \cap]a, +\infty[$	$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$
$D_f \cap]-\infty, a[$	$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$
D_f	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
\mathbb{N}	$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

4.2 Comment calculer la limite d'une fonction

Le Calcul de limite est à la base de l'étude de la CONTINUITÉ et de la DERIVABILITÉ EN UN POINT.

Supposons que l'on veuille calculer $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$.

4.2.1 Par passage à la limite

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et U un voisinage de $a \in A'$ avec $A \in D_f$.

On a alors,

$$\boxed{(\forall x \in U \cap A) f(x) = g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L}$$

Si l'on connaît l'expression de $f(x)$, AU VOISINAGE du point a , on remplace, dans cette expression, x par a .

Soit on trouve un résultat, soit une forme indéterminée. (V. le chapitre sur les suites).

Pour le passage, Nous aurons sûrement besoin de connaître les Limites Usuelles suivantes (Très Utiles).

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{tg(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x) = 0.$$

$$(\forall \alpha > 0) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Exemples :

$$(\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[) f(x) = \frac{1}{|x|} \implies \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = +\infty$$

$$(\forall x \geq 100) f(x) = 3 + \frac{\ln(x)}{x} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$(\forall x \in [0, 1[) f(x) = 3 + \frac{1 + \ln(x)}{x} \implies \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = 4$$

$$(\forall x \in]2, 3]) f(x) = 3 + x^2 \implies \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) = 7$$

4.2.2 Par Encadrement

$$\boxed{(\forall x \in U \cap A) g(x) < f(x) < h(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} h(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L}$$

$$\boxed{(\forall x \in U \cap A) g(x) < f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = +\infty}$$

$$\boxed{(\forall x \in U \cap A) f(x) < h(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} h(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = -\infty}$$

Exemples

$$(\forall x \in]-1, 1[) \quad 7 - x^2 < f(x) < 7 + x^2 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 7$$

$$(\forall x \in]1, 3[) \quad 10 - x^2 < f(x) < 2 + x^2 \implies \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

$$(\forall x \geq 100) \quad 5 - \frac{2}{x} < f(x) < 5 + \frac{1}{x} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

$$(\forall x \geq 1000) \quad x - \frac{2}{x} < f(x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$(\forall x \geq 10) \quad f(x) < \frac{-x^2 + 1}{x + 2} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4.2.3 Par composition

Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$.

Soient $A \subset D_f$ et $B \subset D_g$ avec

$$f(A) \subset B.$$

Soient enfin $a \in A'$, $b \in B'$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a alors

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b, x \in B} g(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g \circ f(x) = L$$

Que l'on écrit sous la forme

$$\lim_{X \rightarrow a, X \in B} \lim_{y \rightarrow a, y \in A} f(y), X \in B \quad g(X) = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(f(x))$$

Exemple

On se propose de calculer

$$\lim_{X \rightarrow 1, X \neq 1} \frac{\ln(X)}{X^2 - 1}$$

Posons

$$g(X) = \frac{\ln(X)}{X^2 - 1} \text{ et } X = f(x) = x + 1.$$

On a alors, avec les mêmes notations,

$$B =]0, 1[\cup]1, 2[, \quad b = 1, \quad a = 0, \quad \text{et } A = f^{-1}(B) =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

La formule ci-dessus donne alors

$$\lim_{X \rightarrow 1, X \neq 1} \frac{\ln(X)}{X^2 - 1} = \lim_{X \rightarrow 1, X \in B} g(X) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in A} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in A} \frac{\ln(1+x)}{x(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Remarque Importante

Sans la condition $f(A) \subset B$, la composition des limites ne marche pas.

Exemple

Soient f et g les applications réelles définies par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{et } g : x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Prenons

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad B = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad a = 0, \quad \text{et } b = 1.$$

On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x \neq 1} g(x) = 2,$$

et

$$g \circ f : x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} g \circ f(x) = 3 \neq 2$$

En effet

$$f(A) = \{1\} \not\subset B.$$

4.2.4 En utilisant le théorème des accroissements finis

On y pense surtout lorsque la limite à calculer se présente sous l'une des formes suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x+1) - F(x))$$

On remplace alors $F(x+1) - F(x)$ par $F'(c)$.

On calcule ensuite la limite quand c tend vers ∞ .

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(c).$$

avec $F(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$, et $x < c < x+1$.

Donc

$$F'(c) = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}(1 - \ln(c))c^{1+\frac{1}{c}}\right) = \left(1 + \frac{1}{c}(1 - \ln(c))\right)c^{\frac{1}{c}}$$

Finalement, remarquons que lorsque $x \rightarrow +\infty$, $c \rightarrow +\infty$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{c}(1 - \ln(c))\right)c^{\frac{1}{c}} = 1$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} (F(x) - F(a)).$$

On remplace alors $F(x) - F(a)$ par $(x - a)F'(c)$ avec $a < c < x$.
on calcule ensuite la limite quand c tend vers a .

Remarque

Pour certaines limites difficiles à calculer par les méthodes ci-dessus, L'utilisation des développements limités est nécessaire.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}\right).$$

4.2.5 Comment montrer que la limite d'une fonction existe sans calcul

Comme pour les suites réelles, si l'on montre qu'une suite est de Cauchy, alors elle converge. De la même façon, pour montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \in \mathbb{R}$, il suffit d'utiliser le critère de Cauchy :

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0) (\exists U \in \mathcal{V}(a)) : (\forall (x, y) \in U) |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Ce critère est à retenir, vu qu'il est aussi valable pour les intégrales généralisées (S_2), les suites et séries de fonctions (S_3).

4.3 Comment montrer que la limite d'une fonction en un point n'existe pas

4.3.1 La limite à droite est différente de La limite à gauche

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x - 7 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 4$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -7$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) \text{ n'existe pas}$$

4.3.2 Par la caractérisation séquentielle de la limite

C'est une condition nécessaire et suffisante qui lie la limite d'une fonction à la limite d'une suite.

Elle s'énonce ainsi :

$f(x)$ tend vers L quand x tend vers a suivant A , si et seulement si pour toute suite d'éléments de A qui converge vers a , la suite $f(x_n)$ des images converge vers L .

Elle se traduit par :

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} = L \iff (\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

On en déduit que

$$(\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \text{ n'existe pas} \implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \text{ n'existe pas non plus}$$

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prenons $x_n = \frac{1}{n\pi}$.

D'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

et de l'autre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \text{ qui n'existe pas}$$

Il s'en suit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x}) \text{ n'existe pas}$$

et que

$$(\exists((x_n), (y_n)) \in (A^{\mathbb{N}})^2) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \text{ n'existe pas}$$

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prenons $x_n = \frac{1}{n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

D'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

et de l'autre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$$

tandis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = 1$$

Il s'en suit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas}$$

Chapitre 5

La continuité des fonctions réelles

5.1 Comment étudier la continuité d'une fonction

En fait, l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction en un point, revient à calculer une limite.

5.1.1 Continuité d'une fonction bien connue

On se sert des règles suivantes :

Les polynômes sont continues sur \mathbb{R} . Les Fractions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur \mathbb{R}^{*+} . $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R} . $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur \mathbb{R} . $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sont continues sur $[-1, 1]$. $x \mapsto tg(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. $x \mapsto arctg(x)$ est continue sur \mathbb{R} . La somme de deux fonctions continues est continue. Le produit de deux fonctions continues est continue. La composée de deux fonctions continues est continue.

5.1.2 Continuité d'une fonction définie par morceaux

Si a est un point de D_f tel que $f(a)$ soit définie séparément.

Pour étudier la continuité de f au point a , il faut calculer $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$.

Si cette limite existe et est égale à $f(a)$, alors f est continue en a , sinon, si cette limite n'existe pas ou est différente de $f(a)$, alors f n'est pas continue en a .

5.1.3 Comment montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a .

Soit f une fonction réelle et $a \in D_f$.

1. On montre que $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) \neq f(a)$. f est alors discontinue au point a .

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 1 \neq f(0) \implies f \text{ n'est pas continue en } 0.$$

2. On montre que $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) \neq f(a)$. f est alors discontinue à gauche du point a .

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 3x^2 + 5x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 1 \neq f(0) \implies f \text{ n'est pas continue à gauche de } 0$$

$$\implies f \text{ n'est pas continue en } 0.$$

Alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 2 = f(0) \implies f \text{ est continue à droite de } 0.$$

3. On montre que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) \neq f(a)$. f est alors discontinue à droite du point a .

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 2 \neq f(0) \implies f \text{ n'est pas continue à droite de } 0$$

$$\implies f \text{ n'est pas continue en } 0.$$

Alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 1 = f(0) \implies f \text{ est continue à gauche de } 0.$$

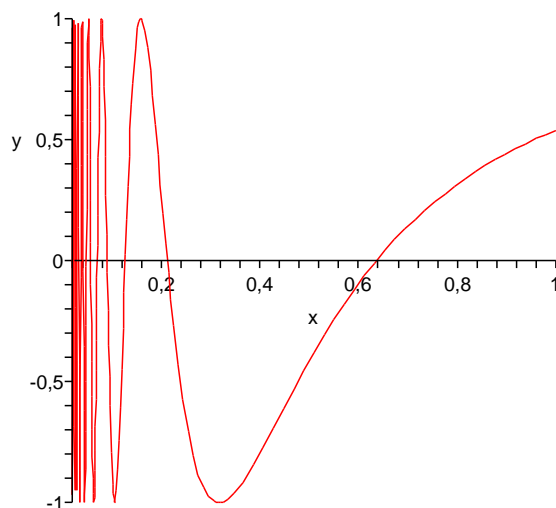


FIGURE 5.1 – Cette fonction paire n'a pas de limite en 0.

4. On présente une suite $(x_n) \in (D_f \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq f(a)$$

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose $x_n = \frac{1}{n\pi}$, on aura $f(x_n) = (-1)^n$ puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \text{ n'existe pas}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \text{ n'existe pas.}$$

f n'est donc pas continue en 0(Voir Figure .

5. On présente deux suites (x_n) et $(y_n) \in (D_f \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$$

Exemple

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ et $y_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$.

on aura d'une part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0,$$

et

$$(\forall n > 0) \quad f(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad f(y_n) = -1$$

Puis d'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$$

Et par conséquent,

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ n'existe pas.}$$

5.2 Continuité uniforme

5.2.1 Comment Montrer qu'une fonction est uniformément continue

La continuité uniforme est une propriété GLOBALE, en ce sens que, lorsque l'on dit : uniformément continue, IL FAUT préciser où ? sur quel ensemble ?

Passer par la définition de la continuité uniforme, est en général difficile. On a recours aux règles suivantes

$$\boxed{f \text{ continue sur le segment compact } [a, b] \implies f \text{ est uniformément continue sur } [a, b].}$$

Cette implication est aussi connue sous le nom du théorème de Heine. Ce théorème est à la base de l'intégrabilité des fonctions continues sur un compact $[a, b]$.

On peut aussi profiter des conditions suffisantes

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est dérivable sur } I \text{ alors } f \text{ est Lipschitzienne sur } I \iff f' \text{ est bornée sur } I.}$$

et

$$\boxed{f \text{ Lipschitzienne sur } A \implies f \text{ est uniformément continue sur } A.}$$

ou des conditions nécessaires

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } A \text{ et } (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ de Cauchy} \implies (f(x_n)) \text{ de Cauchy.}}$$

5.2.2 Comment Montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur A

Il y a, en gros, trois méthodes :

1. On présente une suite

$(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de Cauchy telle que $(f(u_n))$ ne soit pas de Cauchy

Exemple

Pour montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$, il suffit de considérer la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n+1}$.

(x_n) est une suite d'éléments de $]0, 1]$ qui converge vers 0. C'est donc une suite de Cauchy.

Mais $f(x_n) = n + 1$, donc la suite $(f(x_n))$ n'est pas de Cauchy, vu qu'elle diverge.

On en déduit que f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

2. On présente deux suites

(u_n) et (v_n) telles que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n) - f(v_n)) \neq 0$

Exemple

Soit f la fonction définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ par $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = x^2$.

Prenons

$$x_n = n \text{ et } y_n = n + \frac{1}{n}.$$

(x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de \mathbb{R}^+ .

D'une part,

$$f(y_n) - f(x_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$$

De l'autre, On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(y_n) - f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \neq 0$$

On en déduit que $x : \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

3. On peut aussi appliquer la règle ci-après, du prolongement d'une fonction uniformément continue sur un intervalle BORNE.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur }]a, b] \implies \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R}.}$$

Exemple

Soit f la fonction définie de $]0, 1]$ vers \mathbb{R} par $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = \frac{1}{x}$.

Il suffit de remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

f n'est donc pas prolongeable par continuité à droite de 0.

On en déduit que $x : \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Chapitre 6

La dérivabilité des fonctions réelles

6.1 Comment étudier la dérivabilité d'une fonction

L'étude de la dérivabilité est en fait basée sur le calcul d'une limite.

6.1.1 Dérivabilité d'une fonction bien connue

On se sert des règles suivantes :

Les polynômes sont dérivables sur \mathbb{R} . Les Fractions rationnelles sont dérivables sur leurs domaines de définition. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^{*+} . $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^{*+} . $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} . $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur \mathbb{R} . $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sont dérivables sur $] -1, 1[$. $x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} . La somme de deux fonctions dérivables est dérivable. Le produit de deux fonctions dérivables est dérivable. La composée de deux fonctions dérivables est dérivable.

f dérivable en a et g dérivable en $f(a) \implies gof$ est dérivable en a

et de plus

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Exemple

Si

$$f(x) = \sin(x)$$

et

$$g(x) = e^{x+\ln(1+x^2)}$$

Alors

$$(gof)'(x) = \left(1 + \frac{2 \sin(x)}{1 + \sin^2(x)}\right) e^{\sin(x)+\ln(1+\sin^2(x))} \cos(x).$$

6.1.2 Dérivabilité d'une fonction définie par morceaux

Si a est un point de D_f tel que $f(a)$ soit définie séparément.

Pour étudier la dérivabilité de f au point a , il faut calculer $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Si cette limite existe et est égale à $L \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$, sinon, si cette limite est infinie ou n'existe, alors f n'est pas dérivable en a .

Pour que f soit dérivable en a , il faut qu'elle soit dérivable à droite et à gauche de a et que

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

6.1.3 Dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} .

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} et f une bijection continue de I SUR J .

Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I : f(x_0) = y_0$.

$$f \text{ dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) \neq 0 \implies f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0$$

et

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple

Prenons $f : x \mapsto \cos(x)$.

f est continue et strictement croissante sur $[0, \pi]$.

f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in]0, \pi[f'(x) = -\sin(x) \neq 0$.

Or

$$f(]0, \pi[) =]-1, 1[$$

Donc $f^{-1} = \arccos$ est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\begin{aligned} (\forall y \in] - 1, 1[) (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(y))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

6.2 Comment étudier les variations d'une fonction

6.2.1 En étudiant le signe du taux d'accroissement

Soit f une fonction réelle et A une partie de son domaine de définition.

$$(\forall (x, y) \in A^2) : x \neq y \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \iff f \text{ est croissante sur } A$$

$$(\forall (x, y) \in A^2) : x \neq y \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \iff f \text{ est strictement croissante sur } A$$

$$(\forall (x, y) \in A^2) : x \neq y \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0 \iff f \text{ est décroissante sur } A$$

$$(\forall (x, y) \in A^2) : x \neq y \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \iff f \text{ est strictement décroissante sur } A$$

$$(\forall (x, y) \in A^2) : x \neq y \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0 \iff f \text{ est constante } A$$

Cependant, à notre niveau, on utilisera plutôt les règles qui font appel à la dérivée. Cette fois-ci, on remplace A par un intervalle $I \subset D_f$.

6.2.2 En étudiant le signe de la dérivée

Soit f une application dérivable sur un INTERVALLE I .

$$(\forall x \in I) f'(x) \geq 0 \implies f \text{ est croissante sur } I$$

$$(\forall x \in I) f'(x) > 0 \implies f \text{ est strictement croissante sur } I$$

$$(\forall x \in I) f'(x) \leq 0 \implies f \text{ est décroissante sur } I$$

$$(\forall x \in I) f'(x) < 0 \implies f \text{ est strictement décroissante sur } I$$

$$(\forall x \in I) f'(x) = 0 \iff f \text{ est constante sur } I$$

Remarque

Si I n'est pas un intervalle, les règles ci-dessus ne s'appliquent plus. prenons l'exemple suivant
 f est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x > 0$$

Bien évidemment, avec $I = [-2, -1] \cup [1, 2]$, on a

$$(\forall x \in I) f'(x) = 0 \text{ mais } f \text{ n'est pas constante sur } I.$$

En fin, rappelons la règle fondamentale suivante :

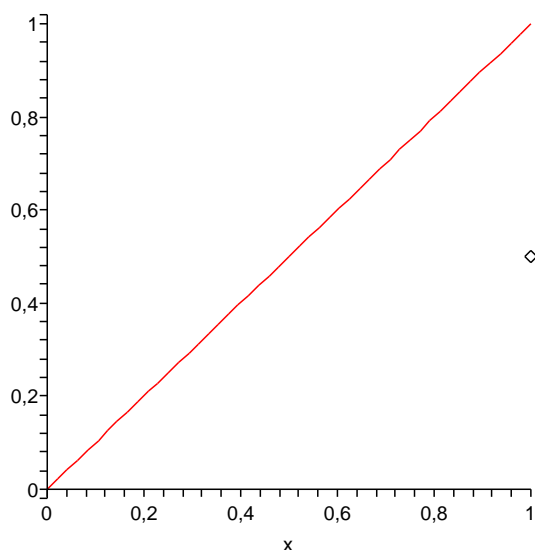


FIGURE 6.1 – $f' > 0$ sur $]0, 1[$ mais f non croissante sur $[0, 1]$

f continue sur $[a, b]$ et $(\forall x \in]a, b[) f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante sur $[a, b]$

La continuité est nécessaire. Examinons l'exemple suivant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a

$$(\forall x \in]0, 1[) f'(x) = 1 > 0 \text{ mais } f \text{ n'est pas croissante sur } [0, 1]$$

6.3 Résolution d'équations

N'oublions pas que c'est quand même, avec les équations différentielles, le but principal de l'analyse réelle.

6.3.1 Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$

Il suffit de vérifier que les conditions du théorème des valeurs intermédiaires, sont remplies :

f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0 \implies (\exists c \in]a, b[) : f(c) = 0$

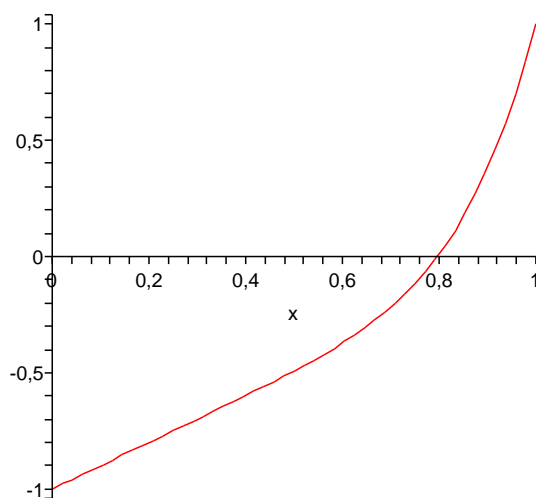


FIGURE 6.2 – L'équation $x^7 + x - 1 = 0$ admet une seule solution sur $[0, 1]$

Exemple

On se propose de montrer que l'équation $x^7 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

Voici comment répondre à cette question :

Soit f la fonction définie de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} par $f(x) = x^7 + x - 1$.

f est continue sur $[0, 1]$ car c'est une fonction polynomiale.

De plus $f(0)f(1) = -1 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

6.3.2 Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[a, b]$

Avec le théorème des valeurs intermédiaires, on vérifie d'abord que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Pour l'unicité de cette solution,

Première méthode

On montre que f est strictement monotone sur $[a, b]$. f sera alors injective et la solution sera unique.

Exemple

On se propose de montrer que l'équation $x^7 + x - 1 = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

Voici comment répondre à cette question :

f est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Par suite

$$(\exists ! c \in]0, 1[) : f(c) = 0.$$

Deuxième méthode

On suppose que l'équation admet deux solutions c_1 et c_2 , et l'on fait appel au théorème de Rolle.

On montre que la dérivée f' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

f est dérivable sur $]0, 1[$ et $(\forall x \in]0, 1[) f'(x) = 7x^6 + 1 \neq 0$ donc

l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, 1[$.

Par suite

$$(\exists ! c \in]0, 1[) : f(c) = 0.$$

6.3.3 Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus n solutions dans $[a, b]$

On raisonne par l'absurde, et l'on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet $n + 1$ solutions.

Il reste alors à s'assurer que l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas n solutions.

Exemple

On voudrait montrer que l'équation $x^4 + 4x - 2 = 0$ admet au plus deux solutions dans $[0, 1]$.

Le TVI assure qu'au moins une solution existe.

Supposons que cette équation admette trois solutions dans $[0, 1]$. Ceci impliquerait, via le théorème de Rolle,

que l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions. Or

$$(\forall x \in [0, 1]) f'(x) = 4(x^3 + 1) = 4(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

On vérifie aisément que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution $x = -1$.

6.3.4 Exemple de résolution numérique

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, on résout l'équation $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

Le TVI assure l'existence d'une solution entre 1 et 2.

Le théorème de la bijection assure l'unicité de cette solution.

Pour approcher la solution, On écrit l'équation $f(x) = 0$ sous une forme équivalente,

$$x = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On construit alors la suite récurrente (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = g(u_n).$$

On calcule respectivement u_1, u_2, u_3, \dots et de plus en plus on s'approche de $\sqrt{2}$.

On trouve ainsi

$$u_1 = 1.5$$

$$u_2 = 1.4166$$

$$u_3 = 1.414215$$

$$u_4 = 1.414213$$

On s'approche de plus en plus de la valeur

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950 \dots$$

Cette approche porte le nom de la méthode de Newton-Raphson.