SMIA 1

ANALYSE 1

PROPRIETES DE L'ENSEMBLE $\mathbb{R}$

et

SUITES REELLES

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Table des matières

1 L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses propriétés **5**
1.1 Introduction à l'analyse réelle . . . 5
1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses propriétés . . . 6
1.2.1 Définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ . . . 7
1.2.2 Théorème Fondamental de l'Analyse Réelle (TFAR) . . . 7
1.2.3 Propriété de la borne supérieure (qui différencie $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.) . . . 9
1.2.4 Caractérisation de la borne SUPERIEURE . . . 11
1.2.5 Conséquences du TFAR . . . 11
1.2.6 Distance et voisinage : nécessaires pour définir la notion de limite . . . 15

2 Les suites réelles **19**
2.1 Introduction et notions utiles . . . 19
2.1.1 Quelques définitions . . . 19
2.1.2 Le Passage à la limite et le Retour de la limite . . . 28
2.1.3 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure . . . 30
2.2 Les Théorèmes de Base . . . 31
2.2.1 Théorème de la limite monotone . . . 31
2.2.2 Théorème des Suites adjacentes . . . 32
2.2.3 Théorème des segments emboîtés . . . 34
2.3 Sous-suite et Suites de Cauchy . . . 34
2.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 35
2.3.2 Complétude de $\mathbb{R}$ . . . 36

Chapitre 1

L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses propriétés

1.1 Introduction à l'analyse réelle

$\boxed{\text{Faire des mathématiques, c'est parler un langage très précis sans jamais mentir.}}$

En gros, les sciences mathématiques peuvent être divisées en trois parties interdépendantes :

l'Analyse, l'Algèbre et la Géométrie.

A son tour, l'Analyse regroupe plusieurs branches : Réelle, Complexe, Fonctionnelle, Numérique, Harmonique, ...

Le but ultime de l'Analyse réelle est d'une part la résolution des équations de la forme $f(x) = 0$ et d'autre part, la résolution des équations différentielles $y' = f(x, y)$. Ces types de problèmes (Equation et Equation différentielle) se rencontrent dans tous les domaines de la recherche scientifique.

Par exemple, en mécanique, il faut résoudre l'équation de mouvement donnée par

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}.$$

La position d'équilibre (pas de mouvement) correspond à l'équation $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$.

En électrocinétique (circuit RLC), on a l'équation différentielle

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t).$$

La partie concernant les équations différentielles sera traitée au second semestre dans le cadre du module (Analyse II).

L'analyse mathématique offre aussi une occasion pour apprendre à raisonner logiquement, rigoureusement et correctement. Ceci est sans doute d'une grande utilité face aux inévitables problèmes de la vie.

Si Dieu le veut, tout au long de ce semestre, nous allons nous intéresser à l'Analyse Réelle, qui constitue la base des autres types d'Analyse. En particulier, nous énoncerons les théorèmes concernant la résolution des équations :

1) Le théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence de la solution.

2) Le théorème de la bijection pour l'unicité de la solution.
3) Le théorème de Rolle qui donne une indication sur le nombre de solutions.

Pour démontrer ces théorèmes, nous aurons besoin des notions de "continuité" et de "dérivabilité" qui reposent sur la notion de limite qui, à son tour, repose sur la notion de "suites."

REMARQUE IMPORTANTE

Il faudrait savoir que pour faire de l'analyse, il y a des MINIMAS à avoir dans la tête :
- Le langage de la théorie des ensembles ($\forall, \exists, \in, \subset, \cup, \cap$...)
- La logique déductive (ou $\vee$, et $\wedge$, implique $\Longrightarrow$, équivalent $\Longleftrightarrow$)
- Les axiomes (du corps $+, -, :, \times$, de l'ordre $<, \leq, >, \geq$, de la borne supérieure sup, ...)
- Les définitions (majorants, minorants, limite, continue, dérivable,....)
- Les Raisonnements DEDUCTIFS (Direct, par l'absurde, par récurrence, par disjonction des cas, par contraposée, par contraposée partielle, par contre exemple, par analyse-synthèse, ...)

1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses propriétés

Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{N}$
L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Z}$
L'équation $2x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$
L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Il n'existe pas de rationnel dont le carré est égal à 2.
Pour démontrer cette proposition, raisonnons par l'absurde et supposons que

$$(\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) \quad : \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}$$

$$p^2 = 2q^2 \implies p \text{ est pair } \implies p = 2p' \implies 2p'^2 = q^2 \implies q \text{ est pair }.$$

Ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.
De la même façon, les nombres π et e qui jouent un grand rôle en mathématiques ne sont pas rationnels.
Il est donc nécessaire de définir un ensemble qui contiendrait, en plus des rationnels, ces nombres dits irrationnels.

La figure 1 illustre les différences entre les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$.
Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{R}$
L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Pour lever cette indétermination, les mathématiciens ont inventé l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

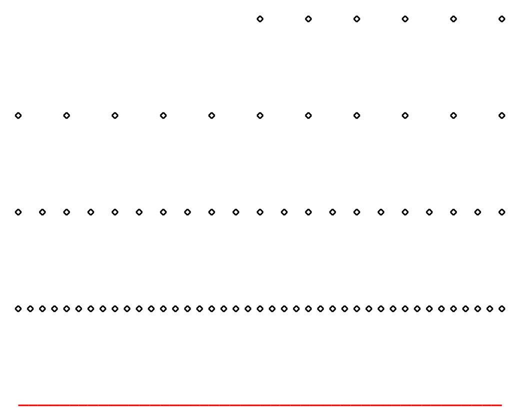

FIGURE 1.1 – De haut en bas, les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et la droite réelle $\mathbb{R}$.

1.2.1 Définition de l'ensemble $\mathbb{R}$

Etant donné que nous faisons de l'analyse, nous n'allons pas rentrer dans les détails de construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ via les axiomes de Péano et de l'ensemble $\mathbb{R}$ à travers les sections de Dedekind ou les suites de Cauchy. Cela est normalement une affaire d'algébristes. Pour la faire court, nous dirons simplement, que $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que l'on peut écrire en utilisant les chiffres $(0-9)$, les signes $(+,-)$ et la virgule représentée par un point..

$$\mathbb{R} = \{2, -3, \frac{5}{10^4}, 1.333333, -0.25, \frac{1}{7}, \sqrt{2}, \pi, e, ...\}$$

$\mathbb{R}$ contient ainsi les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels et les irrationnels.

On a alors la suite d'inclusions suivante

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Lorsque l'on va définir la notion de limite, on aura besoin de deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ que l'on rajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$, pour obtenir ce qu'on appelle la droite réelle achevée notée $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

1.2.2 Théorème Fondamental de l'Analyse Réelle (TFAR)

Il fixe les régles de calcul à respecter quand on fait des opérations $(+, -, x, :)$ ainsi que les régles de comparaison qui permettent de manipuler les symboles $(<, >, \leq, \geq)$.

Pratiquement, toute l'analyse réelle est basée sur ce théorème qui s'énonce ainsi :

Théorème 1. ————————————————————————————————
$(\mathbb{R}, +, \times, <)$ *est un corps commutatif totalement ordonné*

qui posséde la propriété de la borne supérieure.

————————————————————————————————

Ce théorème que l'on admettra vu que sa démonstration est excessivement longue, constitue notre point de départ.

les Axiomes du corps qui fixent les régles de calcul

1. l'addition est commutative .

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\; x + y = y + x$$

2. l'addition est associative .

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$$

3. l'addition admet un élément neutre.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x + 0 = x$$

4. chaque réel a un opposé.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x + (-x) = 0$$

5. la multiplication est commutative.

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\; x \times y = y \times x$$

6. la multiplication est associative.

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \;\; (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

7. la multiplication admet un élément neutre.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; x \times 1 = x$$

8. chaque réel non nul a un inverse.

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \;\; x \times \frac{1}{x} = 1$$

9. la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \;\; x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

Conséquences

1. Simplification additive

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \;\; x + z = y + z \implies x = y$$

2. Simplification multiplicative

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*)\ \ xz = yz \implies x = y$$

Les Axiomes de l'ordre qui déterminent les régles de Majoration ou de Comparaison

1. la trichotomie.

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x < y \ \text{ ou } \ y < x \text{ ou } \ x = y$$

   On utilise aussi la notation $\leq$ pour inférieure ou égal et $\geq$ pour supérieure ou égale.

2. la transitivité.

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)\ \ x < y \ \text{ et } \ y < z \implies \ x < z$$

3. la positivité.

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ x > 0 \ \text{ et } \ y > 0 \implies \ xy > 0$$

Conséquences

1. Compatibilité avec l'addition

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R})\ \ x < y \implies x + z < y + z.$$

2. Compatibilité avec la multiplication par un réel positif

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)\ \ x < y \implies xz \leq yz.$$

3. Incompatibilité avec la multiplication par un réel négatif

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-)\ \ x < y \implies xz \geq yz.$$

4. Inversion de nombres strictement positifs

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \ 0 < x < y \implies \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

1.2.3 Propriété de la borne supérieure (qui différencie $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.)

On dira qu'un ensemble E possède la propriété de la borne supérieure, si toute partie non vide majorée de E, admet une borne supérieure.

De même, On dira qu'un ensemble E possède la propriété de la borne inférieure, si toute partie non vide minorée de E, admet une borne inférieure.

Remarque

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Par exemple, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 3\}$ est majoré mais n'a pas de borne supérieure car tout simplement $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Minorant et Majorant d'un ensemble

Soit A une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$.
On dit que le réel m est un minorant de l'ensemble A si et seulement si

$$(\forall x \in A) \;\; m \leq x$$

A est alors minorée par m.
Si en plus, $m \in A$, on dira que m est le plus petit élément de A et on écrit $m = \min A$..
Exemple Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
De même, on dit que le réel M est un majorant de l'ensemble A si et seulement si

$$(\forall x \in A) \;\; x \leq M$$

A est alors majorée par M.
Si $M \in A$, on parlera de plus grand élément de A et l'on écrira $M = \max A$.
Remarque
Si A est à la fois minorée et majorée, on dira qu'elle est bornée.

$$\boxed{A \text{ et bornée } \iff (\exists (m, M) \in \mathbb{R}) \;\; (\forall x \in A) \;\; m \leq x \leq M}$$

ou

$$\boxed{A \text{ et bornée } \iff (\exists M \in \mathbb{R}^+) \;\; (\forall x \in A) \;\; |x| \leq M}$$

Exemples

$$]1, +\infty[\text{ est minoré par } 1$$

$$]-\infty, 3[\text{ est non minoré mais il est majoré par } 3$$

$$]1, +\infty[\text{ est non majoré}$$

$$]1, 7[\text{ est borné}$$

Borne supérieure et inférieure

Si A est majorée et que l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelera borne supérieure de A, et on le note $\sup A$.

$$\boxed{\sup A = \min\{M \in \mathbb{R} \; : \; (\forall x \in A) \;\; x \leq M\}}$$

De la même façon, si A est minorée et que l'ensemble des minorants admet un plus grand élément, on l'appelera borne inférieure, et on le note $\inf A$.

$$\boxed{\inf A = \max\{m \in \mathbb{R} \; : \; (\forall x \in A) \;\; x \geq m\}}$$

Exemple 1

$$\sup[0, 1[= 1$$

$$\inf\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = 0$$

Remarque Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Alors, il y a deux cas :
1) $\sup A \in A \implies maxA$ existe et $\max A = \sup A$ 2) $\sup A \notin A \implies maxA$ n'existe pas.
Par exemple, si $A = [1, 2[$, alors $\sup A = 2$ et $\max A$ n'existe pas.
De même, si B une partie non vide mainorée de $\mathbb{R}$. Alors, il y a deux cas :
1) $\inf A \in A \implies \min A$ existe et $\min A = \inf A$
2) $\inf A \notin A \implies \min A$ n'existe pas.
Par exemple, si $B = [1, 2[$, alors $\inf B = 1$ et $\min B = \inf B$.
En conclusion

$$\boxed{\text{TOUTE PARTIE NON VIDE MAJOREE DE } \mathbb{R} \text{ admet une BORNE SUPERIEURE}}$$

$$\boxed{\text{TOUTE PARTIE NON VIDE MINOREE DE } \mathbb{R} \text{ admet une BORNE INFERIEURE}}$$

1.2.4 Caractérisation de la borne SUPERIEURE

Il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réel M, soit la borne supérieure d'une partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Cette condition doît traduire d'une part que M est un majorant de A et de l'autre que M est le plus petit majorant, c'est à dire qu'un nombre strictement inférieur à M n'est pas un majorant de A.

$$\boxed{M = \sup A \iff (\forall x \in A \quad x \leq M) \text{ et } (\forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A \ : \ M - \epsilon < a \leq M)}$$

Caractérisation de la borne INFERIEURE

Il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réel M, soit la borne inférieure d'une partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Cette condition doît traduire d'une part que m est un minorant de A et de l'autre que m est le plus grand minorant, c'est à dire qu'un nombre strictement supérieure à m n'est pas un minorant de A.

$$\boxed{m = \inf A \iff (\forall x \in A \quad x \geq m) \text{ et } (\forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A \ : \ m \leq a < m + \epsilon)}$$

1.2.5 Conséquences du TFAR

$\mathbb{R}$ est Archimédien

Montrons que
$$(\forall x > 0) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*) \quad : nx > y$$

Démonstration
Soient $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$(\forall n > 0) \;\; nx \leq y$$

ce qui veut dire que l'ensemble

$$E = \{nx, \; n > 0\} \text{ est majoré par } y.$$

et donc, d'après le TFAR, $\sup E$ existe.
Posons alors $\sup E = \alpha$.
D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$(\exists e \in E) \; : \; \alpha - x < e \leq \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \; (\exists n > 0) \; : \; \alpha - x < nx \leq \alpha$$

$$\Longrightarrow \; (\exists n > 0) \; : \; \alpha < (n+1)x$$

ce qui contredit le fait que $\alpha = \sup E$ et $(n+1)x \in E$.

Partie entière d'un réel

On appelle partie entière d'un réel x, que l'on note $E(x)$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; E(x) \leq x < E(x) + 1}$$

Existence
Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas .
<u>Si $x \in \mathbb{Z}$</u> alors $E(x) = x$.
<u>Si $x > 0$</u>, d'après la propriété d'Archiméde,

$$(\exists m \in \mathbb{N}^*) \quad : \quad m > x$$

Posons $A = \inf\{m \in \mathbb{N}^* \quad : \quad m > x\}$ et $n + 1 = \inf A$
On a donc

$$n \leq x < n + 1$$

et par suite $E(x) = n$.
Exemple

$$x = 3.21 \;\; A = \{4, 5, ...\} \; , \;\; n + 1 = 4, \;\; E(x) = n = 3$$

<u>En fin si $x < 0$</u>,

$$(\exists m \in \mathbb{N}^*) \quad : \quad m > -x$$

Posons $B = \inf\{m \in \mathbb{N}^* \quad : \quad m > -x\}$ et $n + 1 = \inf B$
On a donc

$$n \leq -x < n + 1$$

c'est à dire

$$-n-1 < x < -n$$

et par suite $E(x) = -n-1$.
Exemple

$$x = -2.001, -x = 2.001, \quad B = \{3, 4, 5, ...\} \ n+1 = 3, \quad E(x) = -n-1 = -3$$

$$\boxed{\text{Encadrements utiles } : (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ x-1 < E(x) \leq x \ \text{ et } \ 0 \leq x - E(x) < 1}$$

Remarque
Sachant que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$

On conclut que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{E(10^n x)}{10^n}$$

Ce qui veut dire que tout réel est limite d'une suite de décimaux.
Par exemple

$$\pi \approx 3$$

$$\pi \approx 3.1$$

$$\pi \approx 3.14$$

$$\pi \approx 3.141$$

$$\pi \approx 3.1415$$

$$\pi \approx 3.14159...$$

$$\sqrt{2} \approx 1$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4142...$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Entre deux réels quelconques, il y a au moins un rationnel}}$$

Démonstration
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$.
$\mathbb{R}$ est Archimédien $\implies (\exists n > 0) \ : \ n(y-x) > 10$
$\implies (\exists n > 0) \ : \ nx < nx + 10 < ny$.
Il est clair qu'entre nx et $nx+10$, on peut choisir un entier m . Ce qui donne

$$nx < m < nx + 10 < ny$$

et après division par n qui est non nul, on obtient

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

ce qui prouve l'existence du rationnel $\frac{m}{n}$ dans $]x,y[$.

Conséquences de la Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Tout réel est limite d'une suite de rationnels}}$$

Démonstration
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \ (\exists r_n \in \mathbb{Q}) \ :$$

$$x - \frac{1}{n+1} < r_n < x + \frac{1}{n+1}$$

La suite de rationnels (r_n) satisfait la condition $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$.
<u>Exemple</u>

$$\sqrt{5} = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

où (u_n) est la suite de rationnels définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{5}{2u_n}.$$

<u>remarques</u>
Ceci offre la possiblité de définir l'ensemble $\mathbb{R}$, comme étant l'ensemble de toutes les limites de toutes les suites de rationnels convergentes.

$$\boxed{\text{L'ensemble } Q \text{ des rationnels, ne possède pas la propriété de la borne supérieure}}$$

Considérons l'ensemble A défini par

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

A est non vide majoré par $\sqrt{2}$ mais $\sup A$ n'existe pas car si $supA < \sqrt{2}$, il y aura des rationnels entre $supA$ et $\sqrt{2}$, d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2.6 Distance et voisinage : nécessaires pour définir la notion de limite

Valeur Absolue

1. Définition

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; |x| = \max(x, -x) = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } -x \text{ si } x \leq 0$$

2. Propriétés

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; |x| \geq 0 \text{ et } \quad |x| = |-x|$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; |x| = 0 \iff x = 0$$

3. Inégalité triangulaire (première forme)

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\; |x + y| \leq |x| + |y|$$

La démonstration se fait aisément par disjonction des cas .

4. Inégalité triangulaire (deuxième forme)

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\; \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Démonstration

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|$$

et

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \implies |y| - |x| \leq |y - x|$$

donc

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

et finalement

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Remarque

Cette inégalité sert par exemple à montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right|$$

ou que

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

Intervalle de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

1. Intervalle ouvert
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ a < x < b\}$$
$$]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ 2 < x < 5\}$$
2. Intervalle semi ouvert
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ a < x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ a \leq x < b\}$$
3. Intervalle fermé borné ou SEGMENT
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ a \leq x \leq b\}$$
4. Intervalle ouvert non borné
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ a < x\}$$
$$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ x < b\}$$
5. Intervalle fermé non borné
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ x \geq a\}$$
$$] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \ \ : \ \ x \leq b\}$$

A noter que $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et que $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

<u>Caractérisation d'un intervalle de $\mathbb{R}$</u>
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{A \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \iff (\forall (x, y) \in A^2) : x < y \ \ ]x, y[\subset A}$$

Distance usuelle

La notion de distance est très utile en Analyse. Elle permet d'introduire la notion de voisinage, nécessaire pour définir les limites d'une suite ou d'une fonction. En Topologie, on généralise la notion de distance à des ensembles autres que $\mathbb{R}$, que l'on appelle "Espaces Métriques."

1. Définition
$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \text{distance de } x \text{ à } y = d(x, y) = |x - y|$$

2. Symétrie de la distance

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \;\; d(x,y) = d(y,x)$$

3. Inégalité triangulaire

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3) \;\; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Remarque
On dit que $\mathbb{R}$ muni de cette distance est un ESPACE METRIQUE.

Voisinage

La notion de voisinage est nécessaire pour définir la notion de limite. Elle permet de traduire
l'expression "tend vers" ou "proche de ."

1. Voisinage centré
$]a-\epsilon, a+\epsilon[= \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; |x-a| < \epsilon\}$ est un voisinage centré de a.
$]-1,1[$ est un voisinage centré de 0.
2. Voisinage centré pointé
$]a-\epsilon, a+\epsilon[-\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; 0 < |x-a| < \epsilon\}$ est un voisinage centré pointé de a.
$]-2,0[\cup]0,2[$ est un voisiunage centré pointé de 0.
3. Voisinage à droite pointé
$]a, a+\epsilon[= \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; 0 < x-a < \epsilon\}$ est un voisinage à droite pointé de a.
$]0,2[$ est un voisinage à droite pointé de 0.
4. Voisinage à gauche pointé
$]a-\epsilon, a[= \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; 0 < a-x < \epsilon\}$ est un voisinage à gauche pointé de a.
$]0,1[$ est un voisinage à gauche pointé de 1.
5. Voisinage de $+\infty$
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; x > a\}$ est un voisinage "à gauche pointé" de $+\infty$.
6. Voisinage de $-\infty$
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \;\; : \;\; x < b\}$ est un voisinage "à droite pointé" de $-\infty$.

Chapitre 2

Les suites réelles

2.1 Introduction et notions utiles

Pour montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$,

nous sommes obligés de passer par la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.

La notion de suite est donc un prérequis pour la notion de limite.

2.1.1 Quelques définitions

Suites réelles

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, On appelle suite réelle que l'on note $(u_n)_{n \geq n_0}$ une application définie de l'ensemble $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$ vers $\mathbb{R}$.

u_n sans les parenthèses, représentant l'image d'un entier n est appelé terme général de la suite (u_n).

L'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est appelé ensemble image de la suite (u_n).

Remarque Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle définie pour $n \geq n_0$, alors en posant $v_n = u_{n+n_0}$, on obtient une suite définie pour $n \geq 0$. Donc quitte à faire un décalage d'indice, nous pouvons toujours supposer que $n_0 = 0$. On notera alors une suite (u_n) au lieu de $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Lorsque l'on étudie une suite de réels, ce qui nous intéresse, c'est son comportement à l'infini, c'est à dire pour des indices suffisamment grand. Ce qui compte alors, ce sont les termes u_n où l'indice n est assez grand. On utilise souvent l'expression, "à partir d'un certain rang" pour dire "pour n suffisamment grand."

Exemples

1. <u>Suite Constante</u>

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n = C^{te}.$$

2. <u>Suite Arithmétique</u>

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n = p + nr.$$

C'est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = p$ et de raison r.

On peut calculer la somme des termes d'une suite arithmétique si l'on sait que

$$\boxed{1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

3. <u>Suite Géométrique</u>

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n = pq^n.$$

C'est une suite géométrique de premier terme $u_0 = p$ et de raison q.

On peut calculer la somme des termes d'une suite géométrique si l'on sait que

$$\boxed{q \neq 1 \implies 1 + q + q^2 + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Suite majorée

On dit que la suite réelle (u_n) est majorée $\iff$

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \;\; : \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \leq M$$

$$\iff \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est majoré.}$$

Exemple

La suite $(5 + \cos(n))$ est majorée par 6.

Suite minorée

On dit que la suite réelle (u_n) est minorée $\iff$

$$(\exists m \in \mathbb{R}) \;\; : \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \geq m$$

$$\iff \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est minoré.}$$

Exemple

La suite $(5 + \cos(n))$ est minorée par 4.

Suite bornée

On dit que la suite réelle (u_n) est bornée $\iff$

$$(\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2) \;\; : \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; m \leq u_n \leq M$$

$$\iff (\exists K \in \mathbb{R}^+) \;\; : \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; |u_n| \leq K$$

$$\iff \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné.}$$

Exemple

La suite $(5 + \cos(n))$ est bornée.

Suite croissante

Soit $N \in \mathbb{N}$.
On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $N \iff$

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_{n+1} \geq u_n$$

De même, on dira que la suite (u_n) est strictement croissante $\iff$

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_{n+1} > u_n$$

Exemple
la suite $(2n + 3)$ est strictement croissante.

Suite décroissante

On dit que la suite (u_n) est décroissante $\iff$

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_{n+1} \leq u_n$$

De même, on dira que la suite (u_n) est strictement décroissante $\iff$

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_{n+1} < u_n$$

Exemple
la suite $(\frac{1}{n+1})$ est strictement décroissante.

Suite monotone

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.
Elle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
Exemple
les suites $(sin(n))$ est $(-1)^n$ ne sont pas monotones.

Suite convergente

Dans la définition qui va suivre, les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges et inversement.

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel L si et seulement si u_n devient aussi proche que l'on veut de L lorsque l'indice n devient suffisamment grand. Ceci se traduit par
(u_n) tend vers L quand n tend vers $+\infty \iff$

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n >, \geq N) \ |u_n - L| <, \leq \epsilon$$

ou bien

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_n \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$$

On écrit alors

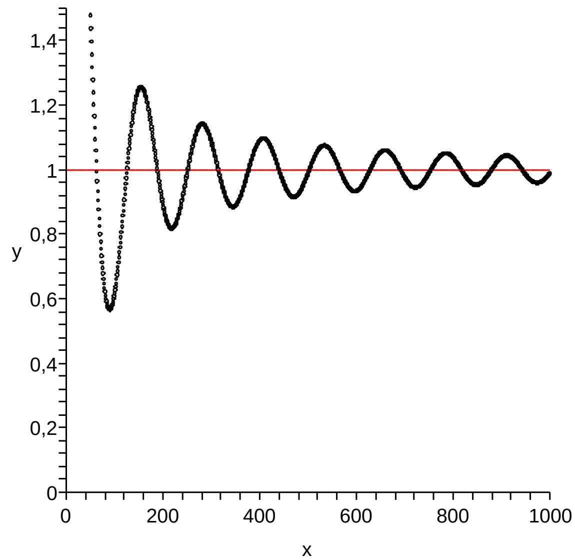

FIGURE 2.1 – Suite qui converge vers 1

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

et on dira que la suite (u_n) converge vers le réel L. Une suite qui n'est pas convergente sera divergente.

Conséquence immédiate

$$\boxed{\text{Toute suite qui converge vers un réel est bornée}}$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice d'assimilation.

Exemples

1. La suite $(sin(n))$ n'est pas convergente.
2. La suite (e^{-n}) converge vers 0.
3. Limite de la suite géométrique

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0 \text{ si } |q| < 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty \text{ si } q > 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 1 \text{ si } q = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \text{n'existe pas si } q \leq -1$$

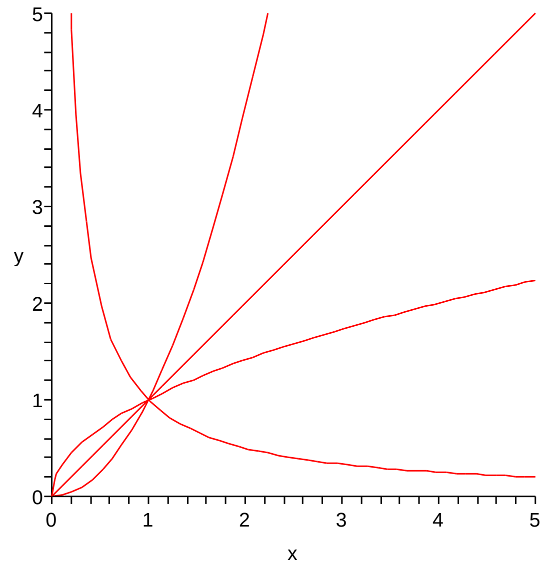

FIGURE 2.2 – La fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ pour $\alpha < 0, 0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$

4. Limite de la Suite puissance

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty \text{ si } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 1 \text{ si } \alpha = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 0 \text{ si } \alpha < 0$$

REMARQUE

Certaines suites réelles (u_n), comme par exemple (e^n), sont croissantes et divergentes. Au lieu de dire qu'elles croissent indéfiniment, on introduit le symbole $+\infty$ (plus l'infini), et on dira que ces suites tendent vers $+\infty$. On écrira alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

De la même façon, pour une suite (v_n) qui décroît indéfiniment, on écrira

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

La droite réelle ACHEVEE est un nom donné à l'ensemble

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Lorsque l'on effectue des opérations sur les limites, on respectera les régles suivantes :

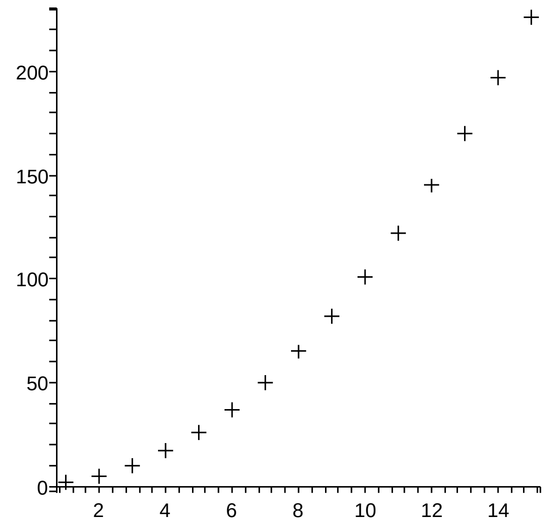

FIGURE 2.3 – Suite qui tend vers $+\infty$

$$+\infty + \infty = +\infty \text{ et } -\infty - \infty = -\infty$$

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty, \quad (+\infty).(-\infty) = -\infty \text{ et } (-\infty).(-\infty) = +\infty$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a + \infty = +\infty, \quad a - \infty = -\infty \text{ et } a.(+\infty) = signe(a)\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \text{ et } \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

Parfois, on tombe sur l'une des FORMES INDETERMINEES SUIVANTES

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty, \quad \infty - \infty \text{ et } 1^{\infty}$$

Suite qui tend vers l'infini

On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ lorque n tend vers l'infini si le terme général u_n devient plus grand que n'importe quel nombre positif, dès que l'indice n devient suffisamment grand.

En d'autres termes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall A > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \quad : (\forall n \geq N) \ u_n > A$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall B<0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ \ : (\forall n\geq N)\ \ u_n < B$$

la suite (e^n) est divergente. Elle tend vers $+\infty$

Limites Usuelles Très Utiles

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} ntg(\frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2(1-\cos(\frac{1}{n})) = \frac{1}{2}.$$

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} = 0.$$

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})\quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-n} = 0.$$

Remarque importante

La nature d'une suite (convergente ou divergente) ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite.

Le comportement d'une suite à l'infini (Sa limite eventuelle) ne dépend que des termes u_n à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, si pour n assez grand, $u_n = v_n$, alors les deux suites (u_n) et (v_n) auront la même nature.

l'expression " pour n assez grand" se traduit par $(\exists N\in\mathbb{N})\ \ : (\forall n\geq N)$.

On peut aussi dire "à partir d'un certain rang."

Propriétés des limites de suites

Les suites considérées ci-dessous sont supposées avoir une limite (fine ou infinie.)

1. Unicité
   Une suite réelle (u_n) ne peut pas converger vers deux limites différentes.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = L_2$$
   Pour un $\epsilon > 0$ quelconque, on a
   $$(\exists N_1 \in \mathbb{N}) \;:\; (\forall n \geq N_1) \;\; |u_n - L_1| < \epsilon$$
   et
   $$(\exists N_2 \in \mathbb{N}) \;:\; (\forall n \geq N_2) \;\; |u_n - L_2| < \epsilon$$
   Posons $N = \sup(N_1, N_2)$. Il s'en suit que
   $$(\forall n \geq N) \;\; |L_2 - L_1| = |(u_n - L_1) - (u_n - L_2)| < |u_n - L_1| + |u_n - L_2| \leq 2\epsilon$$
   d'où $L_1 = L_2$ et l'unicité de la limite quand elle existe.
2. Somme
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = L_2 \implies \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = L_1 + L_2$$
   Démonstration
   Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \implies (\exists N_1 \in \mathbb{N}) \;:\; (\forall n \geq N_1) \;\; |u_n - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$$
   $$\lim_{n\to+\infty} v_n = L_2 \implies (\exists N_2 \in \mathbb{N}) \;:\; (\forall n \geq N_2) \;\; |v_n - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$$
   Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
   Il vient alors
   $$(\forall n \geq N) \;\; |u_n - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } |v_n - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$$
   c'est à dire
   $$(\forall n \geq N) \;\; |(u_n + v_n) - (L_1 + L_2)| \leq |u_n - L_1| + |v_n - L_2| < \epsilon$$

3. Limite de la valeur absolue

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right|$$

La démonstration est basée sur l'inégalité triangulaire $2^{\text{ième}}$ forme.

$$||u_n| - |L|| \leq |u_n - L|.$$

En particulier

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

4. Comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ayant des limites finies ou infinies.

$$\boxed{(\exists N \in \mathbb{N}) : \quad (\forall n \geq N) \ \ u_n < v_n \implies \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

$\boxed{\text{Lorsque l'on passe à la limite, les inégalités STRICTES deviennent LARGES}}$

Exemple

$u_n = \frac{1}{n+2}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$

On a $u_n < v_n$ pour tout entier n mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

5. Encadrement

Si pour n assez grand, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

En particulier,

$$(\exists N \in \mathbb{N}) : \ (\forall n \geq N)|u_n| < v_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \quad \implies \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Cette proposition est très pratique pour démontrer les propriétés sur les limites suivantes :

6. Multiplication par un scalaire

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \implies \lim_{n\to+\infty} (\lambda.u_n) = \lambda.L_1$$

7. Produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = L_2 \implies \lim_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = L_1.L_2$$

8. Quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L_1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = L_2 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{L_1}{L_2}$$

2.1.2 Le Passage à la limite et le Retour de la limite

Toutes les propositions énoncées dans cette section, se démontrent aisément en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Les suites $(u_n), (v_n)$, et (w_n) considérées ci-dessous sont supposées avoir une limite dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Le Passage à la limite

Cela consiste à déduire des propriétés sur la limite éventuelle d'une suite connaissant les propriétés de son terme général.

$$\boxed{(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \quad u_n > 0 \implies \lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0}$$

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}^{-*}$ prenons $\epsilon = \frac{-L}{2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \implies (\exists N_1 \in \mathbb{N}) \quad : \quad (\forall n \geq N_1)$$

$$L - \frac{-L}{2} < u_n < L + \frac{-L}{2}$$

$$\implies (\exists N_1 \in \mathbb{N}) \quad : \quad (\forall n \geq N_1) \ \ u_n < \frac{L}{2} < 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \quad u_n > 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
La démonstration (proposée comme exercice) est analogue si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Conséquence immédiate

$$\boxed{(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \quad u_n > v_n \implies \lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

Remarque IMPORTANTE
Lorsque l'on passe à la limite, les inégalités STRICTES deviennent LARGES.
Si (u_n) est une suite d'éléments d'une partie A de $\mathbb{R}$, alors, la limite de (u_n), si elle existait, elle appartiendrait à L'HADERENCE de A notée $\overline{A}$. Le tableau suivant illustre quelques exemples.

A : Partie de $\mathbb{R}$	Son adhérence : $\overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$
$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b[$	$[a, b]$
$]a, b]$	$[a, b]$
$]a, b[$	$[a, b]$
$]a, +\infty]$	$[a, +\infty]$
$]-\infty, b[$	$[-\infty, b]$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

La Régle de l'encadrement ou des Gendarmes

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \; : \; (\forall n \geq N) \quad v_n < u_n < w_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n$$
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Cas particuliers

1. $$(\exists N \in \mathbb{N}) \; : \; (\forall n \geq N) \quad |u_n| < v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

2. $$(\exists N \in \mathbb{N}) \; : \; (\forall n \geq N) \quad v_n < u_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3. $$(\exists N \in \mathbb{N}) \; : \; (\forall n \geq N) \quad u_n < w_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

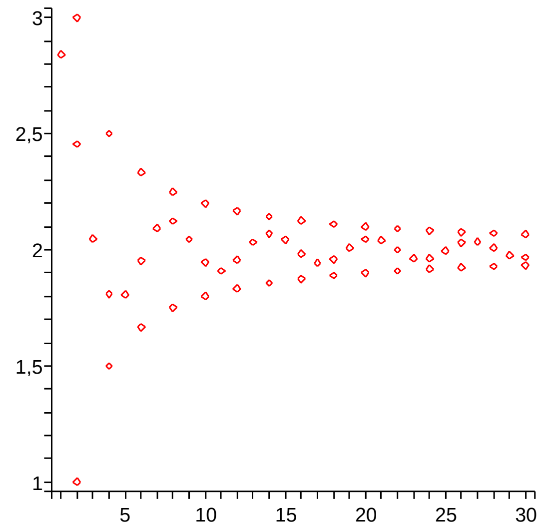

FIGURE 2.4 – La régle du Gendarme pour les suites

Le retour de la limite

Connaissant la limite d'une suite, Il s'agit d'en déduire des propriétés sur son terme général.

$$\lim_{x \to +\infty} u_n > 0 \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \quad : \quad (\forall n \geq N) \quad u_n > 0$$

La démonstration se fait en utilisant la DEFINITION de la limite et en prenant $\epsilon = \frac{\lim_{x \to +\infty} u_n}{2}$.

2.1.3 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

$$\boxed{M = \sup A \iff (\forall x \in A \quad x \leq M) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists a_n \in A \; : \; M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M)}$$

En d'autres termes, $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A qui est en même temps limite d'une suite d'éléments de A.

Exemple

Prenons $A = [0, 1[$. Remarquons que 1 est un majorant de A.

d'autre part, la suite (a_n) définie par $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1. On en en déduit que

$$\sup A = 1$$

Remarque Cette caratérisation séquentielle est très PRATIQUE, en effet, Pour montrer que $m = \inf A$, il suffit de montrer que m est un minorant de A et que, en mêm temps, m est limite d'une suite d'éléments de l'ensemble A.

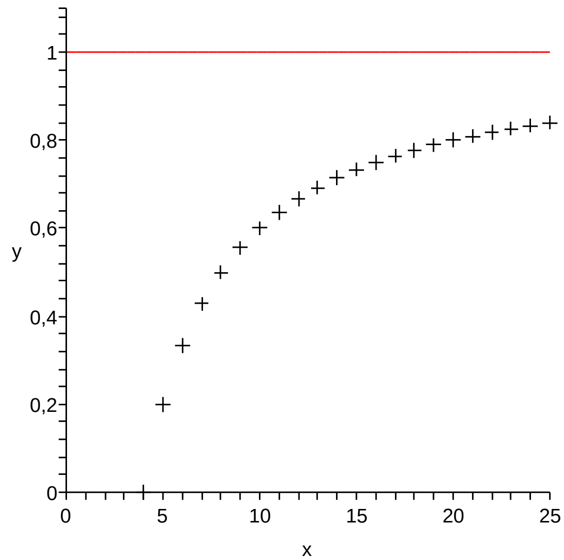

FIGURE 2.5 – Une suite croissante majorée est convergente.

2.2 Les Théorèmes de Base

2.2.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.

$$\boxed{\textit{Toute suite réelle croissante majorée } (u_n)_{n\geq n_0} \textit{ est convergente}}$$

de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n, n \geq n_0\}$$

De même,

$$\boxed{\textit{Toute suite réelle décroissante minorée } (v_n)_{n\geq n_0} \textit{ est convergente}}$$

de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \inf\{v_n, n \geq n_0\}$$

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ quelconque et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle croissante majorée.

$$(u_n)_{n\geq n_0} \text{ majorée } \Longrightarrow \{u_n, n \geq n_0\} \text{ est majoré}$$

$$\Longrightarrow \sup\{u_n, n \geq n_0\} \text{ existe}$$

Posons $L = \sup\{u_n, n \geq n_0\}$.
D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$(\exists N \geq n_0) \ : \ L - \epsilon < u_N \leq L$$

Or (u_n) est croissante, donc

$$(\forall n \geq N) \;\; L - \epsilon < u_N \leq u_n \leq L < L + \epsilon$$

ou bien

$$(\forall n \geq N) \;\; |u_n - L| < \epsilon$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L = \sup\{u_n, n \geq n_0\}.$$

Remarque1

Si (u_n) est une suite croissante NON majorée, alors $\lim_{n \to +\infty} = +\infty$. Si (u_n) est une suite décroissante NON minorée, alors $\lim_{n \to +\infty} = -\infty$.

Remarque2

Le théorème de la limite monotone est parfois utilisé pour calculer la borne supérieure ou inférieure d'un certain ensemble.

Par exemple, en prenant $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, on en déduit que

$$\inf\{2 + \frac{1}{n}, n > 0\} = 2$$

étant donné que (u_n) est décroissante et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2.2.2 Théorème des Suites adjacentes

Définition 3. On dit que deux suites réelles sont Adjacentes si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0 .

Remarque

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq v_n$$

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on commence par chercher celle qui est plus grande que l'autre, c'est elle qui sera alors décoissante. L'autre (la plus petite) sera normalement et automatiquement croissante .

Exemple

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

(v_n) est décoissante.

Remarque

(u_n) et (v_n) sont deux suites de RATIONNELS qui convergent vers e qui est IRRATIONNEL. Ceci confirme le fait que l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet .

Théorème 4.

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite

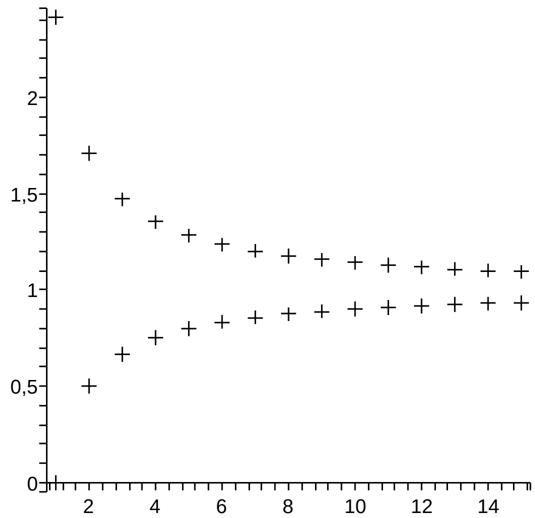

Figure 2.6 – Deux suites adjacentes

Démonstration
Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
On a alors,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \leq v_n$$

Car dans le cas contraire, on aurait

$$(\exists p \in \mathbb{N}) \;\; v_p < u_p$$

$$\Longrightarrow \;\; (\forall n \geq p) \;\; v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$$

$$\Longrightarrow \;\; (\forall n \geq p) \;\; u_n - v_n \geq u_p - v_p > 0$$

$$\Longrightarrow \;\; \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) \geq v_p - v_p > 0$$

Ce qui contradirait l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$. Donc forcément

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Ceci entraîne que (u_n) est croissante majorée (par v_0) et que (v_n) est décroissante minorée (par u_0.)
Par conséquent les deux suites sont convergentes.
Or

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 = \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

2.2.3 Théorème des segments emboîtés

Si (I_n) avec $I_n = [a_n, b_n]$ est une suite décoissante (au sens de l'inclusion)de segments emboités, dont la largeur $\delta(I_n) = b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide.

Démonstration

$(I_n)_{n\geq 0}$ décroissante $\Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

$$\Longrightarrow (a_n) \text{ est coissante et } \quad (b_n) \text{ décoissante.}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$$

donc

$$(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes et par suite convergent vers la même limite } c \in \mathbb{R}.$$

$$(a_n) \text{ croissante et } \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = c \quad \Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ a_n \leq c$$

de même

$$(b_n) \text{ décroissante et } \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = c \quad \Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ c \leq b_n$$

Il vient

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ a_n \leq c \leq b_n$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ c \in I_n \Longrightarrow c \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

$$\Longrightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

2.3 Sous-suite et Suites de Cauchy

Définition 5. On dit qu'une suite (v_n) est une sous-suite de la suite (u_n) s'il existe une injection $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_n = u_{\phi(n)}$$

Exemples

(u_{2n}) est la sous-suite des indices pairs.

(u_{2n+1}) est la sous-suite des indices impairs.

(u_{3-n}) n'est pas une sous-suite de la suite (u_n).

Lemme 6. *Si ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, alors*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \phi(n) \geq n.$$

Démonstration
Raisonnons par récurrence.

$$\phi(0) \in \mathbb{N} \implies \phi(0) \geq 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N} \ : \ \phi(n) \geq n$.
ϕ strictement croissante $\implies \phi(n+1) > \phi(n) \geq n \implies \phi(n+1) \geq n+1$.
CQFD.

Théorème 7. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite que la suite mère*

Démonstration
Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v_n = u_{\phi(n)}$ une suite extraite de (u_n).
Prenons un voisinage V quelconque de L.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ u_n \in V$$

Or

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \phi(n) \geq n)$$

donc

$$(\forall n \geq N) \ \phi(n) \geq N) \text{ et } v_n = u_{\phi(n)} \in V$$

CQFD.
Remarques
- Ce théorème est sûrtout utilisé pour montrer qu'une suite est divergente. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle admet une sous suite divergente, ou deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes.
- La limite d'une sous-suite $u_{\phi(n)}$ est aussi appelée "Valeur d'Adhérence" de la suite (u_n).
- La plus grande valeur d'adhérence porte aussi le nom de "Limite Supérieure."

Exemple
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1 \neq 1$$

1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

2.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 8.

$$\boxed{\textit{Toute suite bornée admet une sous suite convergente}}$$

Démonstration
Soit (u_n) une suite réelle bornée.

$$(u_n) \text{ bornée} \implies (\exists I_0 = [a_0, b_0] \subset \mathbb{R}) \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \in I_0$$

Le segment I_0 est alors atteint par une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$. Soit p_0 un indice parmi ceux-la.

On a alors $a_0 \leq u_{p_0} \leq b_0$.
Posons $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
On a alors $I_0 = [a_0, c_0] \cup [c_0, b_0]$.
Soit $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ ou $[c_0, b_0]$ la moitié de I_0 atteinte par une infinité d'indices.
Parmi ces indices, prenons p_1 tel que

$$p_1 > p_0 \text{ et } u_{p_1} \in I_1.$$

La largeur du segment I_1 est donnée par $\delta(I_1) = b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$.
De la même façon, posons $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On définit alors le segment I_2 comme étant la moitié de I_1 atteinte par une infinité d'indices.
Parmi ces indices, prenons p_2 tel que

$$p_2 > p_1 \text{ et } u_{p_2} \in I_2.$$

De plus, $\delta(I_2) = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b_0-a_0}{2^2}$.
On construit ainsi une suite (I_n) de segments emboîtés et une sous-suite (u_{p_n}) de (u_n) telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq u_{p_n} \leq b_n$$

Or (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc la sous -suite (u_{p_n}) est convergente.

2.3.2 Complétude de $\mathbb{R}$

Définition 9. On dit qu'une suite réelle (u_n) est de Cauchy si lorsque l'indice devient suffisamment grand, les termes de la suite se rapprochent les uns des autres. Ceci se traduit par

$$(u_n) \text{ de Cauchy} \iff (\forall \epsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall p, q \geq N) \ |u_p - u_q| < \epsilon$$

Ou de façon équivalente

$$(u_n) \text{ de Cauchy} \iff (\forall \epsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N)(\forall p > 0) \ |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

<u>Remarques</u>
–

$$\boxed{\text{Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.}}$$

<u>Démonstration</u>
Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné et (u_n) une suite qui converge vers $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : (\forall n \geq N) \ |u_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies (\forall p, q \geq N) \ |u_p - L| < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ et } \ |u_q - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies (\forall p, q \geq N) \ |u_p - u_q| = |(u_p - L) - (u_q - L)| < \epsilon$$

$$\implies (u_n) \text{ est de Cauchy}$$

–

$$\boxed{\text{Toute suite réelle de Cauchy est bornée.}}$$

Démonstration

Soit (u_n) une suite de Cauchy. Prenons pour simplifier $\epsilon = 1$.

$$(u_n) \text{ de Cauchy} \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : (\forall n \geq N) \ |u_n - u_N| < 1$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : (\forall n \geq N) \ u_N - 1 < u_n < u_N + 1$$

$$\implies (u_n) \text{ est bornée.}$$

Lemme 10. *Si (u_n) est une suite de Cauchy et ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$,*

alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{\phi(n)}) = 0$$

Démonstration

Soit (u_n) est une suite de Cauchy et ϕ est une application strctement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.

(u_n) est de Cauchy $\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n, p \geq N) \ |u_n - u_p| < \epsilon$

Prenons en particulier $p = \phi(n) \geq n$. on aura alors

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \geq N) \ |u_n - u_{\phi(n)}| < \epsilon$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{\phi(n)}) = 0.$$

Exemple Classique

Considérons la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

On a alors

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{2n}-n) \geq \frac{1}{2} \text{ n'existe pas}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{2n}-n) \neq 0$$

$$\Longrightarrow (u_n) \text{ n'est pas de Cauchy}$$

$$\Longrightarrow (u_n) \text{ n'est pas Convergente.}$$

Corollaire 11.

$$\boxed{\textit{Toute suite réelle de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente}}$$

ou bien

$$\boxed{\textit{Une suite réelle de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.}}$$

Soit (u_n) est une suite de Cauchy et $(u_{\phi(n)})$ une sous suite convergente.
D'après le lemme précédent,

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{\phi(n)}) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)}.$$

Théorème 12.

$$\boxed{\textit{Toute suite réelle de Cauchy est convergente}}$$

On dit alors que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet, ce qui n'est pas la cas pour l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Démonstration
Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

$$(u_n) \text{ de Cauchy } \Longrightarrow (u_n) \text{ est bornée}$$

$$\Longrightarrow (u_n) \text{ admet une sous suite convergente } (u_{\phi(n)}).$$

Or

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n = u_{\phi(n)} + (u_n - u_{\phi(n)})$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{\phi(n)}) = 0.$$

Donc
(u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)}$.
Remarque
La complétude de l'ensemble $\mathbb{R}$, est une propriété essentielle en analyse réelle. Elle est à la base
des fameux critères de Cauchy : convergence d'une suite, existence de la limite d'une fonction, convergence d'une série, convergence d'une intégrale généralisée, convergence uniforme d'une suite de fonctions ...

Ces critères sont purement théoriques, ils assurent l'existence d'une limite sans forcément connaître cette limite.

Pour terminer cette partie sur les suites de Cauchy, on donnera une CONDITION SUFFISANTE pour qu'une suite réelle soit de Cauchy.

$$\boxed{(\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*) \quad |u_{n+p} - u_n| < v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \implies (u_n) \text{ est de Cauchy.}}$$

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné. Remarquons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n \geq 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n > N) \ \ v_n < \epsilon$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \ \ |u_{n+p} - u_n| < v_n < \epsilon$$

$$\implies (u_n) \text{ est de Cauchy.}$$

HEUREUSEMENT QUE DIEU EST LA.