SMIA 2

INTEGRALE de RIEMANN

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Meknès - Morocco.

a.hammam@fs.umi.ac.ma
Toute remarque venant de votre part est la bienvenue

Table des matières

Si vous trouvez des erreurs, prière de me le faire savoir par E-mail. Merci.

Chapitre 1

Intégrabilité au sens de Riemann sur un compact

C'est quoi le but ?

Apprendre à trouver les primitives, pour pouvoir calculer des intégrales et résoudre Certaines équations différentielles.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons définir l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ où a et b sont deux réels : $a < b$ et f une application défine de l'intervalle compact $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, BORNEE .

Le cas d'une fonction non bornée, d'un intervalle borné non fermé, ou d'un intervalle non borné, sera traité dans le cadre de chapitre 2 sur les intégrales généralisées.

Si vous vous rappelez, avant de parler de la dérivée d'une fonction, il a fallu définir d'abord la dérivabilité.

Eh bien, de la même façon, avant de parler d'intégrale, nous devrions commencer par définir ce qu'est une fonction INTEGRABLE.

Géométriquement parlant, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction positive, représente la surface délimitée par la courbe de la fonction f, l'axe $\vec{Ox}$ et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Prenons l'exemple de la fonction suivante :(V. figure 1)

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad 2 \quad \text{sinon}$$

Pour répondre à la question : La fonction f définie ci-dessus est-elle intégrable sur $[0, 1]$?, il faut donner une définition mathématique rigoureuse de l'intégrabilité. Dans le cadre du programme, nous donnerons deux définitions (Darboux et Riemann) et nous admettrons

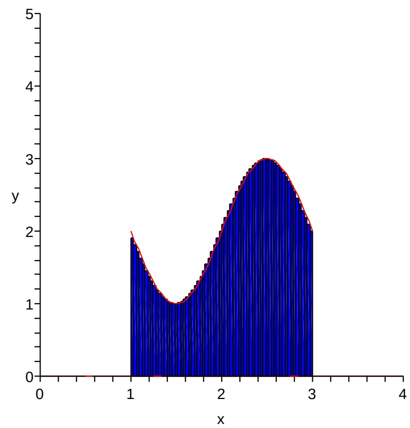

Figure 1.1 – L'intégrale représente une surface

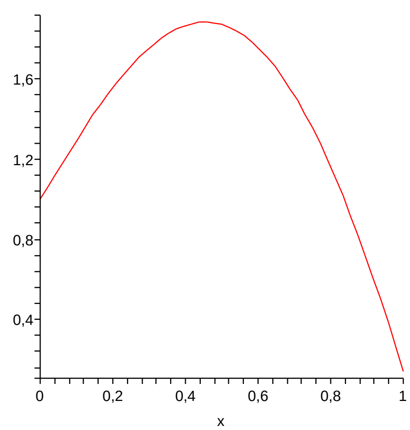

Figure 1.2 – Fonction intégrable au sens de Riemann

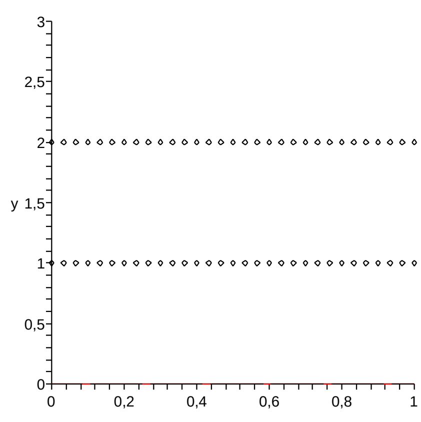

Figure 1.3 – Fonction non intégrable au sens de Riemann

qu'elles sont équivalentes étant donné que la démonstration de cette équivalence est relativement difficile et demande un certain temps.

Les applications pratiques du calcul intégral sont nombreuses : Calcul de longueur, de surface, de volume, de quantité de chaleur, de travail, de flux, de probabilité et sûrtout la résolution des équations différentielles, ...

1.1.1 Notions de base

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Definition 1. On dit que A est majorée si et seulement si tous ses éléments sont plus petits, au sens large, qu'un certain nombre réel M.

$$A \text{ est majorée} \iff (\exists M \in \mathbb{R}) \ : \ (\forall x \in A) \quad x \leq M$$

Definition 2. On dit que A est minorée si et seulement si tous ses éléments sont plus grands au sens large, qu'un certain nombre réel m.

$$A \text{ est minorée} \iff (\exists M \in \mathbb{R}) \ : \ (\forall x \in A) \quad x \geq M$$

Definition 3. On dit que A est bornée si et seulement si tous ses éléments sont compris, entre deux réels constants m et M.

$$A \text{ est bornée} \iff (\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2) \ : \ (\forall x \in A) \quad m \leq x \leq M$$

Axiome de la borne supérieure

$$\boxed{\text{Toute partie non vide majorée de } \mathbb{R} \text{ admet une borne supérieure}}$$

$$\boxed{\text{Toute partie non vide minorée de } \mathbb{R} \text{ admet une borne inférieure}}$$

Cet axiome permet de différencier l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. En effet, si l'on considère la partie A définie par : $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \leq 2\}$, on s'aperçoit que A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure. Ceci vient du fait que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel ($\notin \mathbb{Q}$). Cet axiome est aussi à la base de la complétude de l'ensemble $\mathbb{R}$: (TOUTE SUITE DE CAUCHY D'ELEMENTS DE $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Cet axiome, appelé parfois, propriété de la borne supérieure, est essentiel pour la définition de l'intégrabilité au sens de Darboux.

Caractérisation et caractérisation séquentiellle de la borne supérieure

Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réel M soit la borne supérieure d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$.

$$\sup A = M \iff \begin{cases} (\forall x \in A) \ \ x \leq M \\ (\forall \epsilon > 0) \ \ (\exists a \in A) \ \ : \ \ M - \epsilon < a \leq M \end{cases}$$

Il est souvent plus pratique d'utiliser la caractérisation séquentielle suivante

$$\sup A = M \iff \begin{cases} (\forall x \in A)\ \ x \leq M \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ (\exists a_n \in A)\ \ :\ \ M - \frac{1}{n+1} < a \leq M \end{cases}$$

Qui se traduit aussi par :

$$\sup A = M \iff \begin{cases} (\forall x \in A)\ \ x \leq M \\ M = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \ \text{ avec } (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \end{cases}$$

Une propriété élémentaire mais fondamentale sur les inégalités

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ \ : a \leq b \leq c \leq d$. Alors

$$c - b \leq d - a$$

Démonstration

$$a \leq b \implies -b \leq -a \implies c - b \leq c - a \leq d - a \implies c - b \leq d - a$$

1.1.2 Théorèmes de base

Pour ceux que ça pourrait intéresser, voici les théorèmes à connaître pour suivre avec un minimum de dégât les cours d'analyse 3, analyse 4 ...

Le théorème de la limite monotone des suites.
Le théorèmes des suites adjacentes.
Le théorème des segments emboîtés.
Le théorème de Bolzano Weierstrass.
Le critère de Cauchy de la limite d'une suite.
Le théorème de le limite monotone des fonctions.
La caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
La caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction.
Le critère de Cauchy de la limite d'une fonction.
Le théorème des valeurs intermédiaires.
Le théorème des valeurs exterieures (appelé aussi théorème de Darboux).
Le théorème de la bijection.
Le théorème de la borne.
Le théorème de Heine.
Le théorème de Rolle.
Le théorème des accroissements finis.
Le critère d'intégrabilité de Cauchy.
Le théorème fondamental du calcul intégral 1.
Le théorème fondamental du calcul intégral 2.

1.2 Intégrabilité au sens de Darboux

1.2.1 Notion de subdivision d'un intervalle fermé borné $[a, b]$

Définition On appelle subdivision du segment $[a, b]$, toute famille $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ de points de $[a, b]$ telle que :
$x_0 = a$, $x_n = b$ et

$$a < x_1 < x_2 ... < x_j < x_{j+1} < ... < x_{n-1} < b$$

Exemples :
$(1, 2, 3, 4)$ est une subdivision de $[1, 4]$
$(1, 2, 4, 5, 3)$ n'est pas une subdivision de $[1, 5]$
$\sigma_0 = (a, b)$ est la subdivision grossière. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ sera noté S.

Définition
On appelle "pas" de la subdivision $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$, la quantité notée $|\sigma|$ et définie par :

$$|\sigma| = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{x_{j+1} - x_j\}$$

Exemples :
$\sigma = (1, 2, 7, 8, 9)$ est une subdivision de $[1, 9]$ avec $|\sigma| = 5$
$\sigma = (1, 2, 4, 7, 9)$ est une subdivision de $[1, 9]$ avec $|\sigma| = 3$
Définition
On dit que la subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est régulière si et seulement si

$$\boxed{\forall j \in \{0, 1, 2, ...n - 1\} \;\; x_{j+1} - x_j = \text{ constante } = \frac{b - a}{n}}$$

Dans ce cas, on a :

$$\forall j \in \{0, 1, 2, ...n\} \;\; x_j = a + j\frac{b - a}{n}$$

Définition
On dit que la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ, si σ' contient tous les points de σ.
Exemples :
$\sigma' = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ est plus fine que $\sigma = (1, 2, 5, 6)$

$\sigma' = (1, 3, 4, 5, 6)$ n'est pas plus fine que $\sigma = (1, 2, 5, 6)$

1.2.2 Sommes de Darboux inférieures L et supérieures U

Soit f une application bornée définie sur l'intervalle $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i=0,n}$ une subdivision de $[a, b]$.
On appelle somme inférieure et somme supérieure, les quantités suivantes :

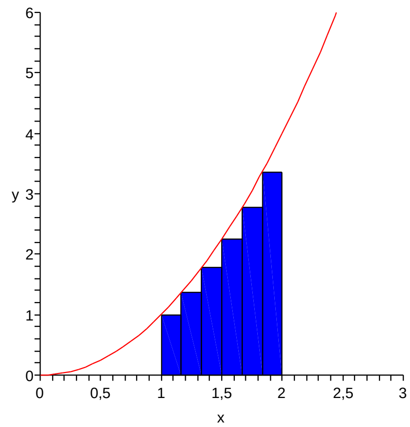

FIGURE 1.4 – Somme de Darboux inférieure sur $[1, 2]$

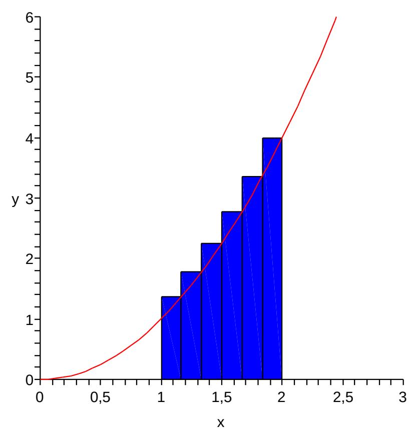

FIGURE 1.5 – Somme de Darboux supérieure sur $[1, 2]$

$$\boxed{L(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad U(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)}$$

avec

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{f(x)\}$$

et

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{f(x)\}$$

1.2.3 Propriétés des Sommes de Darboux

les Sommes inférieures sont plus petites que les sommes supérieures

$$\boxed{(\forall \sigma \in S))\ \ L(f,\sigma) \leq U(f,\sigma)}$$

Démonstration

Soit $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n) \in S$.

On a

$$(\forall i \in \{0,1,2...n\}) m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} \leq \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} = M_i$$

donc

$$\boxed{L(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = U(f,\sigma)}$$

les Sommes inférieures sont croissantes

$$\boxed{(\forall (\sigma, \sigma') \in S^2)\ \ \sigma \subset \sigma' \implies L(f,\sigma) \leq L(f,\sigma')}$$

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration en prenant $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ et $\sigma' = \sigma \cup \{y\}$.
Soit $j \in \{1, 2..., n-1\}$ tel que $x_j < y < x_{j+1}$. On a

$$L(f,\sigma') = \sum_{i=0}^{j-1} m_i (x_{i+1} - x_i) + \alpha_j (y - x_j) + \beta_j (x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

avec $\alpha_j = \inf\{f(x),\ x \in [x_j, y]\}$ et $\beta_j = \inf\{f(x),\ x \in [y, x_{j+1}]\}$.
Or $\alpha_j \geq m_j$ et $\beta_j \geq m_j$,
donc $\alpha_j (y - x_j) + \beta_j (x_{j+1} - x_j) \geq m_j (y - x_j) + m_j (x_{j+1} - x_j) = m_j (x_{j+1} - x_j)$
et par suite,

$$L(f,\sigma') \geq \sum_{i=0}^{j-1} m_i (x_{i+1} - x_i) + m_j (x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = L(f,\sigma)$$

CQFD.

les Sommes supérieures sont décroissantes

$$\boxed{(\forall (\sigma, \sigma') \in S^2)\ \ \sigma \subset \sigma' \implies U(f,\sigma') \leq U(f,\sigma)}$$

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration en prenant $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ et $\sigma' = \sigma \cup \{y\}$.
Soit $j \in \{1, 2..., n-1\}$ tel que $x_j < y < x_{j+1}$. On a

$$U(f,\sigma') = \sum_{i=0}^{j-1} M_i(x_{i+1} - x_i) + \alpha_j(y - x_j) + \beta_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

avec $\alpha_j = \sup\{f(x),\ x \in [x_j, y]\}$ et $\beta_j = \sup\{f(x),\ x \in [y, x_{j+1}]\}$.
Or $\alpha_j \leq M_j$ et $\beta_j \leq M_j$,
donc $\alpha_j(y - x_j) + \beta_j(x_{j+1} - x_j) \leq M_j(y - x_j) + M_j(x_{j+1} - x_j) = M_j(x_{j+1} - x_j)$
et par suite,

$$U(f,\sigma') \leq \sum_{i=0}^{j-1} M_i(x_{i+1} - x_i) + M_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = U(f,\sigma)$$

CQFD.

la Somme L est plus petite que n'importe quelle somme U

$$\boxed{(\forall(\sigma_1, \sigma_2) \in S^2) \quad L(f,\sigma_1) \leq U(f,\sigma_2)}$$

Démonstration

Soient σ et σ_2 deux subdivisions du segment $[a, b]$. Il est clair que la réunion $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision plus fine que σ_1 et plus fine que σ_2.
D'après les propriétés précédentes, on a

$$L(f,\sigma_1) \leq L(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq U(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq U(f,\sigma_2)$$

Récapitulatif

D'après ce qui précède, on a

$$(\forall(\sigma_1, \sigma_2) \in S^2)$$
$$L(f,\sigma_0) \leq L(f,\sigma_1) \leq L(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq U(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq U(f,\sigma_2) \leq U(f,\sigma_0)$$

Il s'en suit que l'ensemble $\{L(f,\sigma)\ ,\ \sigma \in S\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure notée $L(f)$ et que l'ensemble $\{U(f,\sigma)\ ,\ \sigma \in S\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ qui admet une borne inférieure notée $U(f)$.
De plus, on a l'encadrement suivant

$$(\forall(\sigma_1, \sigma_2) \in S^2)$$
$$L(f,\sigma_0) \leq L(f,\sigma_1) \leq L(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq U(f,\sigma_2) \leq U(f,\sigma_0)$$

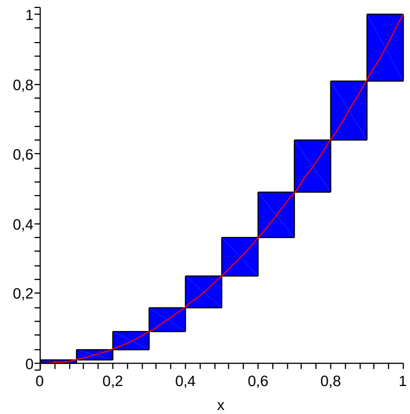

FIGURE 1.6 – La différence U-L est représentée par les petits rectangles

1.2.4 Définition de l'intégrabilité au sens de Darboux

Soit f une fonction définie et bornée sur l'intervalle compact $[a, b]$.

$$\boxed{f \text{ est Darboux-intégrable sur } [a,b] \iff \sup_{\sigma\in S}\{L(f,\sigma)\} = \inf_{\sigma\in S}\{U(f,\sigma)\}}$$

Dans ce cas on a

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = L(f) = U(f)$$

En général, il est très difficile de trouver $L(f)$ et $U(f)$, donc pour étudier l'intégrabilité d'une fonction, il est plus pratique d'utiliser le critère suivant.

1.3 Critère d'intégrabilité de Cauchy

Ce critère offre une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable, sans avoir à connaître ni $L(f)$, ni $U(f)$. Il s'énonce comme suit

$$\boxed{f \quad \text{est intégrable sur} \quad [a,b] \iff (\forall\epsilon > 0) \ \ (\exists\sigma \in S) \quad : \quad U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon}$$

Tout simplement, il traduit le fait que la fonction f sera intégrable sur $[a, b]$ si la différence entre la somme supérieure et la somme inférieure peut être rendue aussi petite que l'on veut, à condition de choisir la bonne subdivision (V fig 1.5 et fig 1.6)

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.
f intégrable sur $[a, b] \implies L = U$
d'autre part

$$\exists\sigma_1 \in S \quad : \quad L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(f,\sigma_1) \le L$$

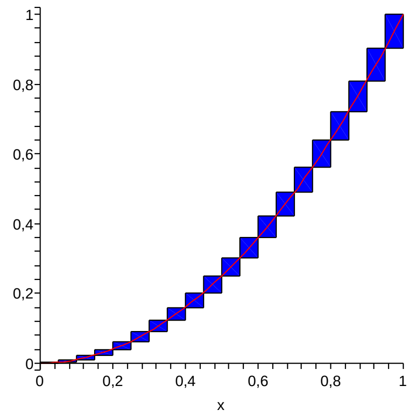

FIGURE 1.7 – La différence $U(f,\sigma) - L(f,\sigma)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut

et

$$\exists \sigma_2 \in S \quad : \quad L(f) \leq U(f,\sigma_2) < L(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Il vient

$$L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(f,\sigma_1) \leq L(f,\sigma) \leq U(f,\sigma) \leq U(f,\sigma_2) < L(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$$

Réciproquement, Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.

$$\exists \sigma \in S \quad : \quad U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$$

or

$$L(f,\sigma) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f,\sigma)$$

donc

$$0 \leq U(f) - L(f) \leq U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$$

On en déduit que $L(f) = U(f)$.

1.3.1 Exemple de fonction intégrable

Il n'est pas nécessaire de proposer des exemples de fonctions non intégrables, il suffit de prendre une fonction non bornée. Il serait plus intéressant de connaître quelques types de fonctions plutôt intégrables.

Les fonctions monotones

$$\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ monotone sur } [a,b] \text{ est intégrable sur } [a,b]}$$

Démonstration

Sans perdre de généralité, on peut toujours supposer que f est croissante sur $[a,b]$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné et $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision régulière de pas $h = \frac{b-a}{n}$.

Par hypothèse, $L(f,\sigma) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\Big(f(x_0) + f(x_1) + ...f(x_{n-1})\Big)$

et $U(f,\sigma) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = h\Big(f(x_1) + f(x_2) + ...f(x_n)\Big)$.

d'où

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) = h(f(x_n) - f(x_0) = \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n}$$

Il suffit alors de choisir un entier n tel que $\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n} < \epsilon$.

Les fonctions continues

$$\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ continue sur } [a,b] \text{ est intégrable sur } [a,b]}$$

Démonstration

Utilisons le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.

f est continue sur le compact $[a,b] \implies f$ est uniformément continue sur $[a,b]$ (Théorème de Heine)

donc

$$\exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in [a,b]^2 : |x-y| < \eta \;\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Soit $\sigma_n = (x_0, x_1, ...x_n)$ une subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n} < \eta$.

$$U(f,\sigma_n) - L(f,\sigma_n) = h\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)$$

D'autre part, le théorème de la borne, nous assure l'existence de $(\alpha_i, \beta_i) \in [x_{i+1}, x_i]$:
$f(\alpha_i) = m_i$ et $f(\beta_i) = M_i$.

Il suffit maintenant de remarquer que $|\alpha_i - \beta_i| \leq x_{i+1} - x_i < \eta$ et par suite

$$|f(\alpha_i) - f(\beta_i)| = M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$$

et finalement

$$U(f,\sigma_n) - L(f,\sigma_n) = h\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i) < \epsilon$$

Ce qui montre que f est intégrable sur $[a,b]$.

Les fonctions continues sauf en un point

$$\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ continue sur }]a,b],\ \text{bornée sur } [a,b],\ \text{est intégrable sur } [a,b]}$$

Démonstration

f étant bornée sur $[a,b]$, posons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.
Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné. f est continue sur le compact $[a + \frac{\epsilon}{2(M-m)}, b]$.
$\Longrightarrow$ f est intégrable sur $[a + \frac{\epsilon}{2(M-m)}, b]$.
$\Longrightarrow$ $\exists \sigma \in S_{[a+\frac{\epsilon}{2(M-m)}, b]} \ : U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \frac{\epsilon}{2}$
posons $\sigma' = \sigma \cup \{a\}$.
σ' est une subdivision de $[a,b]$. D'autre part
$U(f,\sigma') - L(f,\sigma') = U(f,\sigma) - L(f,\sigma) + \frac{\epsilon}{2(M-m)}(\sup_{[a,a+\frac{\epsilon}{2(M-m)}]} f - \inf_{[a,a+\frac{\epsilon}{2(M-m)}]} f)$
$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(M-m)}(M-m) < \epsilon$

Relation de Chasles

Soit $c$un point de l'intervalle $[a,b]$. Alors

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [a,b] \iff f \text{ est intégrable sur } [a,c] \text{ et sur } [c,b]}$$

De plus, on a

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

Démonstration

Supposons f intégrable sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$ donné.
D'après le critère de Cauchy, $\exists \sigma \in S_{[a,b]} \ : U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$
Posons $\sigma' = \sigma \cup c, \sigma_1 = \sigma' \cap [a,c]$ et $\sigma_2 = \sigma' \cap [c,b]$.
Par construction, σ_1 et σ_2 sont respectivement des subdivisions de $[a,c]$ et de $[c,b]$.
De plus $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) = (U(f,\sigma_1) - L(f,\sigma_1)) + (U(f,\sigma_2) - L(f,\sigma_2))$
Donc $U(f,\sigma_1) - L(f,\sigma_1) \leq U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$
et $U(f,\sigma_2) - L(f,\sigma_2) \leq U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$
Ce qui montre que f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.
Réciproquement, supposons que f soit intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.
Soit $\epsilon > 0$ donné.
D'après le critère de Cauchy, $\exists \sigma_1 \in S_{[a,c]} \ : U(f,\sigma_1) - L(f,\sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}$
et $\exists \sigma_2 \in S_{[c,b]} \ : U(f,\sigma_2) - L(f,\sigma_2) < \frac{\epsilon}{2}$
Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. σ est bien une subdivision de $[a,b]$.
Par sommation des deux inégalités précédentes, on obtient
$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$. Ce qui prouve que f est intégrable sur $[a,b]$
Montrons dans ce cas que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Soit $\epsilon > 0$ quelconque.

Avec les mêmes notations ,

$$L(f,\sigma) \leq \int_a^b f \leq U(f,\sigma)$$

$$\Longrightarrow L(f,\sigma_1) + L(f,\sigma_2) \leq \int_a^b f \leq U(f,\sigma_1) + U(f,\sigma_2)$$

$$\Longrightarrow U(f,\sigma_1) + U(f,\sigma_2) - \epsilon \leq \int_a^b f \leq L(f,\sigma_1) + L(f,\sigma_2) + \epsilon$$

$$\Longrightarrow \int_a^c f + \int_c^b f - \epsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f + \epsilon$$

$$\Longrightarrow \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

CQFD.
Corollaire

$$\boxed{\text{Toute application admettant un nombre fini de discontinuités est intégrable}}$$

$$\boxed{\text{Toute fonction en escaliers est intégrable sur son segment de définition}}$$

remarque 4. *De façon plus générale, on montre qu'une fonction définie sur le segment* $[a,b]$*, et dont l'ensemble des discontinuités est dénombrable, est intégrable sur* $[a,b]$*.*

1.4 Définition de Riemann

La définition de Darboux est très précise, mais elle présente un inconvénient, à savoir que la valeur de l'intégrale donnée par $\int_a^b f = L = U$, n'est pas toujours facile à déterminer.

1.4.1 Définition des sommes de Riemann

Pour définir une somme de Riemann $R(f,\sigma,\xi)$, on a besoin de :

1. f , une application bornée de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$.
2. $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$, une subdivision de $[a,b]$.
3. $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$, famille de points avec $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

On a alors

$$R(f,\sigma,\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

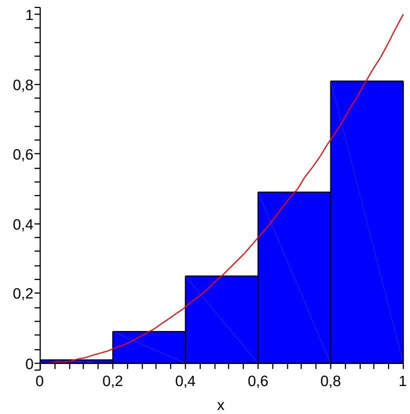

FIGURE 1.8 – Les sommes de Riemann se rapprochent de la surface I

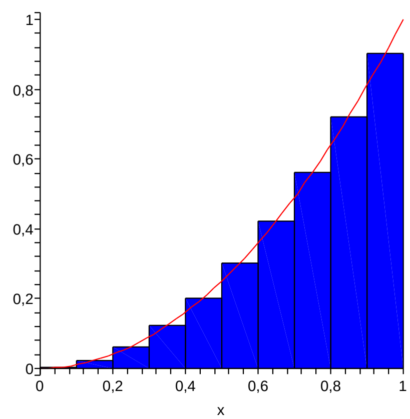

FIGURE 1.9 – Les sommes de Riemann se rapprochent de la surface I

1.4.2 Intégrabilité au sens de Riemann

D'après Riemann, une fonction est intégrable si lorsque le pas des subdivisions devient suffisamment petit, TOUTES les somme s de Riemann deviennent très proches d'un certain réel I.

f est Riemann-intégrable sur $[a, b] \iff$

$$(\exists I \in \mathbb{R}) \ : \ (\forall \epsilon > 0) \quad (\exists p > 0) \quad (\forall \sigma \in S)$$

$$|\sigma| < p \implies (\forall \xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})) \quad |R(f, \sigma, \xi) - I| < \epsilon$$

Remarque

On admettra l'équivalence entre la définition de Darboux et celle de Riemann.

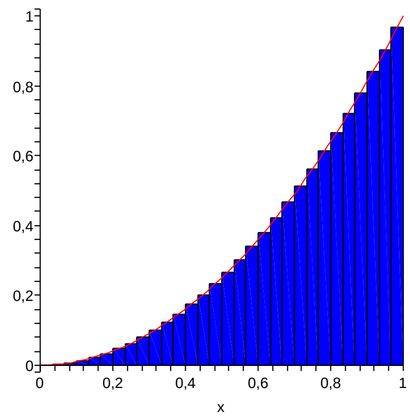

FIGURE 1.10 – Les sommes de Riemann se rapprochent de la surface I

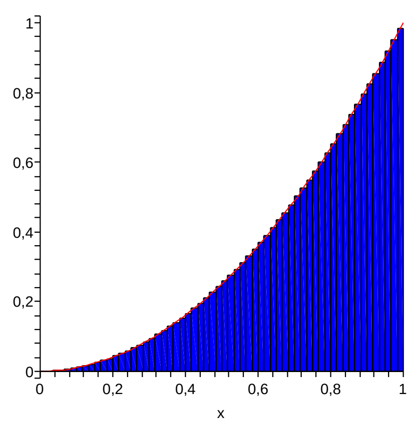

FIGURE 1.11 – Les sommes de Riemann se rapprochent de la surface I

On a alors l'égalité :

$$\int_a^b f(x)dx = I = L(f) = U(f)$$

Cas particulier des subdivisions régulières

f est Riemann-intégrable sur $[a,b] \implies$

$$(\exists I \in \mathbb{R}) \ : \ (\forall \epsilon > 0) \quad (\exists p > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\frac{b-a}{n} < p \implies (\forall \xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})) \quad |R(f, \sigma_n, \xi) - I| < \epsilon$$

Posons $N = E(\frac{b-a}{p}) + 1$. La définition donne alors
f est Riemann-intégrable sur $[a,b] \implies$

$$(\exists I \in \mathbb{R}) \ : \ (\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$n \geq N \implies (\forall \xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})) \quad |R(f, \sigma_n, \xi) - I| < \epsilon$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} R(f, \sigma_n, \xi) = I = \int_a^b f$$

Application au calcul de certaines limites

Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors
En prenant $\xi_i = x_i$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

et si l'on prend pour ξ_i, l'extrêmité droite x_{i+1}, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

1.5 Propriétés de l'intégrale

1.5.1 La surface ou la "mesure" d'un point est nulle ! ?

$$\boxed{\int_a^a f = 0}$$

En considérant le cas trop particulier où $a = b = c$, la relation de Chasles donne

$$\int_a^a f + \int_a^a f = \int_a^a f \implies \int_a^a f = 0$$

De même, si l'on prend $a = b$, la relation de Chasles donnerait

$$\int_a^c f + \int_c^a f = \int_a^a f = 0$$

et par conséquent, il serait légitime de convenir que

$$\boxed{\int_b^a f = -\int_a^b f}$$

Ainsi,

$$\int_1^0 xdx = -\frac{1}{2}$$

1.5.2 Additivité

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ intégrables sur } [a,b] \implies f+g \text{ intégrable sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g}$$

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$.

$$f \text{ intégrable sur } [a,b] \implies (\exists \sigma_1 \in S) \ : \ U(f,\sigma_1) - L(f,\sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$g \text{ intégrable sur } [a,b] \implies (\exists \sigma_2 \in S) \ : \ U(f,\sigma_2) - L(f,\sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. σ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que les deux subdivisions σ_1 et σ_2.

donc

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) \leq U(f,\sigma_1) - L(f,\sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

et

$$U(g,\sigma) - L(g,\sigma) \leq U(g,\sigma_1) - L(g,\sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

La somme terme à terme des deux dernières inégalités donne

$$(U(f,\sigma) - L(f,\sigma)) + (U(g,\sigma) - L(g,\sigma)) < \epsilon$$

c'est à dire

$$U(f+g,\sigma) - L(f+g,\sigma) < \epsilon$$

Ce qui montre que la somme $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$.

D'autre part, avec les mêmes notations,

$$\int_a^b (f+g) \leq U(f+g,\sigma) = U(f,\sigma) + U(g,\sigma) \leq L(f,\sigma) + L(g,\sigma) + \epsilon \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon$$

et

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon \leq U(f,\sigma) + U(g,\sigma) - \epsilon \leq L(f,\sigma) + L(g,\sigma) \leq \int_a^b (f+g)$$

On en déduit que

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon \leq \int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon$$

D'où l'égalité

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$$

Exemple 5. $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto cos(x)$ sont intégrables sur $[0,\pi]$, car continues, donc

$$\int_0^\pi (\sin(x) + \cos(x))dx = \int_0^\pi \sin(x)dx + \int_0^\pi \cos(x)dx =$$

$$\Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi + \Big[\sin(x)\Big]_0^\pi = 2.$$

1.5.3 Linéarité

$$\boxed{f \text{ intégrable sur } [a,b] \implies (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \lambda f \text{ intégrable sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f}$$

Démonstration

On supposera que $\lambda \neq 0$.
Il suffit d'utiliser le fait que

$$R(\lambda f, \sigma, \xi) = \lambda R(f, \sigma, \xi)$$

et que
$|R(f,\sigma,\xi) - I| < \epsilon$ si $|\sigma| < p$.

1.5.4 Lemme très utile

Lemme 6. *Soit f une application intégrable sur le segment $[a,b]$ et G une fonction réelle telle que*

$$(\forall (x,y) \in [a,b])\ \ |G(x) - G(y)| \leq K|f(x) - f(y)| \text{ où } K > 0.$$

Alors G est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ donné et $\sigma = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ satisfaisant la condition

$$U(f,\sigma) - L(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i(f) - m_i(f))(x_{i+1} - x_i) < \frac{\epsilon}{K}$$

Où pour chaque indice $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $m_i(f) = \inf\{f(t), t \in [x_i, x_{i+1}]\}$ et $M_i(f) = \sup\{f(t), t \in [x_i, x_{i+1}]\}$.
Il est presque évident que pour chaque $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, on a

$$(\forall (x,y) \in [x_i, x_{i+1}]^2) \quad |f(x) - f(y)| \leq (M_i(f) - m_i(f))$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall (x,y) \in [x_i, x_{i+1}]^2) \quad |G(x) - G(y)| \leq K(M_i(f) - m_i(f))$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall (x,y) \in [x_i, x_{i+1}]^2) \quad G(x) \leq G(y) + K(M_i(f) - m_i(f))$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall y \in [x_i, x_{i+1}]) \;\; M_i(G) \leq G(y) + K(M_i(f) - m_i(f))$$

car $G(y) + K(M_i(f) - m_i(f))$ est un majorant de l'ensemble $\{G(x), x \in [x_i, x_{i+1}]\}$

$$\Longrightarrow \quad (\forall y \in [x_i, x_{i+1}]) \;\; M_i(G) - K(M_i(f) - m_i(f)) \leq G(y)$$

$$\Longrightarrow \qquad M_i(G) - K(M_i(f) - m_i(f)) \leq m_i(G)$$

car $M_i(G) - K(M_i(f) - m_i(f))$ est un minorant de l'ensemble $\{G(y), x \in [x_i, x_{i+1}]\}$

$$\Longrightarrow \qquad M_i(G) - m_i(G) \leq K(M_i(f) - m_i(f))$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} M_i(G) - m_i(G) \leq K\sum_{i=0}^{n-1}(M_i(f) - m_i(f))$$

$$\Longrightarrow \quad U(G,\sigma) - L(G,\sigma) \leq K\Big(U(f,\sigma) - L(f,\sigma)\Big) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad G \text{ est intégrable sur } [a,b].$$

Ci-après, quelques conséquences directes de ce lemme.

1.5.5 Produit

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ intégrables sur } [a,b] \implies fg \text{ intégrable sur } [a,b]}$$

Si l'on remarque que

$$(\forall x \in [a,b]) \;\; (fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{(f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2}{4},$$

Il suffit alors de montrer que

$$\boxed{f \text{ intégrables sur } [a,b] \implies f^2 \text{ intégrable sur } [a,b]}$$

Démonstration

Utilisons le critère d'intégrabilité de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$.
f intégrable sur $[a,b]$

$$\implies f \text{ est bornée sur } [a,b]$$

$$\implies (\exists M \in \mathbb{R}^+) \quad : \quad (\forall x \in [a,b]) \ |f(x)| \le M.$$

D'autre part, on a

$$(\forall (x,y) \in [a,b]^2) \ \ |f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)||f(x) + f(y)| \le 2M|f(x) - f(y)|.$$

Le lemme précédent permet alors de conclure sur l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $[a,b]$.

1.5.6 Inverse

$$\boxed{f \text{ intégrable sur } [a,b] \text{ et } \frac{1}{f} \text{ définie et bornée sur } [a,b] \implies \frac{1}{f} \text{ intégrable sur } [a,b]}$$

Démonstration

Par hypothèse,

$$\frac{1}{f} \text{ est bornée sur } [a,b] \implies (\exists M > 0) : (\forall x \in [a,b]) |\frac{1}{f(x)}| \le M$$

$$(\forall (x,y) \in [a,b]^2) \ \ |\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}| = |\frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)}| \le M^2|f(x) - f(y)|$$

Le lemme précédent, avec $(K = M^2)$, permet alors de conclure sur l'intégrabilité de la fonction $\frac{1}{f}$ sur $[a,b]$.

1.5.7 Positivité

$$\boxed{f \text{ intégrable sur } [a,b] \text{ et } (\forall x \in [a,b]) \ f(x) \ge 0 \implies \int_a^b f \ge 0}$$

Démonstration

Si σ est une subdivision de $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f \ge L(f,\sigma) \ge 0$$

1.5.8 Comparaison

Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \geq \int_a^b g}$$

Il suffit d'appliquer la positivité et l'additivité de l'intégrale de $f-g$.

1.5.9 Valeur absolue

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [a,b] \implies |f| \text{ est intégrable sur } [a,b]}$$

$$\boxed{\text{de plus } |\int_a^b f\ | \leq \int_a^b |f|}$$

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ donné.

f intégrable sur $[a,b] \implies (\exists \sigma \in S)\ :\ U(f,\sigma) - L(f,\sigma) < \epsilon$. Posons $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$. Pour $i = 0, 1, 2..., n-1$, on a

$$(\forall (x,y) \in [x_i, x_{i+1}]^2)\ \ ||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

Le lemme ci-dessus prouve alors que la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$.

D'autre part,

$$-|f| \leq f \leq |f| \implies \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\implies -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\implies |\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Remarque : La dernière inégalité suppose que $a \leq b$.

1.5.10 Inégalité de Cauchy Schwartz

$$\boxed{f \ \text{ et } \ g \ \text{ intégrables sur } \ [a,b] \implies \Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \int_a^b f^2.\int_a^b g^2}$$

Démonstration

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après la positivité dde l'intégrale,

$$\int_a^b (\lambda f + g)^2 \geq 0 \implies \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0$$

Ce trinôme en λ étant toujours positif, son discriminant est donc négatif.

$$\Delta = 4\Big((\int_a^b fg)^2 - \int_a^b f^2 \int_a^b f^2 \Big) \leq 0$$

$$\implies \Big(\int_a^b fg \Big)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

Cette inégalité permet, en mécanique quantique, d'expliquer le principe d'incertitude de Heisenberg !!

1.5.11 Deuxième Formule de la moyenne

Soit f une application continue sur $[a, b]$ et g une application positive et intégrable sur $[a, b]$.

alors

$$\boxed{(\exists c \in [a, b]) \quad : \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx}$$

Démonstration

D'après les théorèmes de la borne et des valeurs extrêmes,

f continue sur $[a, b] \implies \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f([a, b]) = [m, M]$

$$\implies \forall x \in [a, b] \ \ m \leq f(x) \leq M$$

$$\implies \forall x \in [a, b] \ \ mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

$$\implies \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

$$\implies m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = f(a) \int_a^b g(x)dx$ donc $c = a$ par exemple.

Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Or $f([a, b]) = [m, M]$, donc $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in f([a, b])$

$$\implies (\exists c \in [a, b]) \quad : \quad \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$$

$$\implies (\exists c \in [a, b]) \quad : \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

remarque 7. *Cette formule est d'une grande utilité pour demontrer la règle d'Abel, appelé par certains le test de Dirichlet,*

sur la convergence des intégrales impropres.

Cas particulier : La $1^{\text{ère}}$ formule de la moyenne
Si $g = 1$, la formule de la moyenne devient

$$\boxed{(\exists c \in [a,b]) \quad : \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)}$$

Chapitre 2

Les Théorèmes Fondamentaux du calcul intégral

2.1 Premier Théorème Fondamental du calcul intégral $(TFCI_1)$

Comme son nom l'indique, ce théorème propose, sous condition, une méthode de calcul d'une intégrale.

Théorème 8. *Soit* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{G \text{ est dérivable sur } [a,b] \text{ et } G' \text{ est intégrable sur } [a,b] \implies \int_a^b G' = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)}$$

Démonstration

Soit $\sigma_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une subdivision régulière de $[a,b]$.
D'une part, on a

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_{n-1} + G(x_{n-1} - ... + G(x_1) - G(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1}(G(x_{i+1} - G(x_i))$$

Or G est dérivable sur $[a,b]$, donc, à fortiori, elle est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, 1, 2..., n-1\}$. Le théorème des accroissements finis permet alors d'écrire

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)G'(c_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} G'(c_i) = R(G', \sigma_n, c_i)$$

avec $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$.
Or G' est, par hypothèse, intégrable sur $[a,b]$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} R(G', \sigma_n, c_i) = \int_a^b G' = G(b) - G(a)$$

2.1.1 PREMIERE Conséquence du $TFCI_1$: Intégrales usuelles.

$$\boxed{f \text{ intégrable sur } [a,b] \text{ et } \exists G : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable } : \ f = G' \to \Longrightarrow \int_a^b f = \int_a^b G' = G(b) - G(a)}$$

Exemple 9. Si $G(x) = x^3$, alors G est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$ $G'(x) = 3x^2$, donc G' est continue sur $[0,1]$ et par conséquent, intégrable sur $[0,1]$.

Il s'en suit que

$$\int_0^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

2.1.2 DEUXIEME Conséquence du $TFCI_1$: L'intégration par parties.

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [a,b] \implies \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'}$$

Démonstration

u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$ $\implies$ $uv' + u'v$ est continue sur $[a,b]$
$\implies$ uv est dérivable sur $[a,b]$ et $(uv)'$ est intégrable sur $[a,b]$

$$\implies \int_a^b (uv)' = \Big[uv\Big]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

$$\implies \int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'$$

et

$$\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v$$

Exemple 10. Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx$.

On peut mettre cette intégrale I sous la forme $I = \displaystyle\int_0^1 uv'$

avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = 2xe^{x^2}$ ou $v(x) = e^{x^2}$.
u et v sont clairement de classe C^1 sur $[0,1]$, donc

$$I = \int_0^1 uv' = \Big[uv\Big]_0^1 - \int_0^1 u'v$$

$$= e - \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e - \Big[e^{x^2}\Big]_0^1 = 1.$$

2.2 Deuxième Théorème Fondamental du calcul intégral $(TFCI_2)$

Il s'agit d'un théorème qui offre une condition suffisante pour qu'une application numérique définie sur un intevalle I de $\mathbb{R}$ admette une primitive sur cet intervalle.

D'après le TFCI_1, l'existence d'une primitive est nécessaire au calcul intégral et sûrtout à la résolution de certaines équations différentielles.

Mais auparavant, nous aurons besoin des notions suivantes :

2.2.1 Fonction intégrale

Soit f une application intégrable sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$.

La fonction intégrale associée à f, qui s'annule en c, est définie par

$$F_c(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_c^x f = \int_c^x f(t)dt$$

Notons que $F_c(f)(c) = \int_c^c f = 0$.

remarque 11. *$F_c(f)$ est la fonction intégrale qui s'annule en c. S'il n'y a pas de risque de confusion, la fonction intégrale de f sera notée $F(f)$ ou tout simplement F, au lieu de $F_c(f)$.*

2.2.2 Continuité de la fonction intégrale

La fonction intégrale F d'une fonction f intégrable sur $[a,b]$ est TOUJOURS continue sur $[a,b]$.

Théorème 12.

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [a,b] \implies (\forall c \in [a,b]) \ F_c(f) \quad \text{est continue sur } [a,b]}$$

Démonstration

pour montrer que $F(f)$ est continue sur $[a,b]$, montrons qu'elle est continue en tout point x_0 de $[a,b]$.

Soit $(x_0, c) \in [a,b]^2$.

f intégrable sur $[a,b] \implies f$ bornée sur $[a,b]$

$$\implies \exists M \in \mathbb{R}^+ \ : \ \forall x \in [a,b] \ \ |f(x)| \leq M$$
$$\implies |F_c(x) - F_c(x_0)| = |\int_c^x f - \int_c^{x_0} f| = |\int_{x_0}^x f| \leq M|x - x_0|$$
$$\implies F_c \text{ lipschitzienne sur } [a,b]$$
$$\implies F_c \text{ Uniformément continue sur } [a,b]$$
$$\implies F_c \text{ continue sur } [a,b]$$

2.2.3 Dérivabilité de la fonction intégrale

Théorème 13.

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \in [a,b] \implies F(f) \text{ est dérivable en } x_0}$$

$$\boxed{\text{de plus } F(f)'(x_0) = f(x_0)}$$

Démonstration

Soit f intégrable sur $[a,b]$ et $F_c : x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ sa fonction intégrale. Supposons que f soit continue en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$ c'est à dire que

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \eta > 0) \ \ : \ (\forall x \in [a,b]) \ \ (\ |x - x_0| < \eta \implies \left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.
f continue en $x_0 \implies (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall x \in [a,b]) \ (\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$
or

$$\Delta = \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt$$

et pour $x \in [a,b] - \{x_0\}$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on a

$$(\forall t \in [x_0, x]) \ \ |t - x_0| \leq |x - x_0| < \eta$$

donc

$$(\forall x \in [a,b]) \ \ (\ |x - x_0| < \eta \implies (\forall t \in [x_0, x]) \ \ |t - x_0| \leq \eta$$

$$\implies (\forall t \in [x_0, x]) \ \ |f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

$$\implies | \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)dt)| < \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0|dt < \epsilon|x - x_0|$$

$$\implies |\Delta|dt < \frac{\epsilon|x - x_0|}{|x - x_0|}$$

$$\implies |\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)|dt < \epsilon.$$

CQFD. Comme conséquence directe, nous avons le second théorème fondamental du calcul intégral suivant :

Théorème 14. ——————————- *TFCI*$_2$ ——————————

$$\boxed{f \text{ continue sur } [a,b] \implies F : x \mapsto \int_a^x f \text{ dérivable sur } [a,b] \text{ et } F' = f}$$

On dit alors que la fonction intégrale F d'une fonction continue f est une primitive de f.

2.2.4 Notion de Primitive

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que G est une primitive de f sur I si G est dérivable sur I et que

$$(\forall x \in I) \;\; G'(x) = f(x)$$

Pour une raison purement pédagogique, On dira que f est PRIMITIVABLE sur I au lieu de dire que f admet une primitive sur I.
Par exemple, $G : x \mapsto \sin(x)$ est une primitive de $f : x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
et
$G : x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x})$ sur $]-\infty, 0[$

Remarques IMPORTANTES

** Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors $(\forall x \in I) \;\; F_1(x) = F_2(x) + C^{te}$.
Ceci est une conséquence de théorème des (avis aux proffessionnels) ... accroissements finis.
** D'après le $TFCI_1$, si f est intégrable sur $[a,b]$, et si G est une primitive de f sur I, alors

$$(\exists K \in \mathbb{R}) \;\; : \;\; (\forall x \in I) \;\; F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x G'(t)dt = G(x) - G(a)$$

On en déduit alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction intégrable sur $[a,b]$, soit primitivable sur $[a,b]$:
** f est PRIMITIVABLE sur $[a,b]$ $\iff$ F est dérivable sur $[a,b]$ et
$(\forall x \in [a,b]) \;\; F'(x) = f(x) \iff F' = f$.

** f N'est pas PRIMITIVABLE sur $[a,b]$ $\iff$ F NON dérivable sur $[a,b]$ OU $F' \neq f$.

** f continue sur $[a,b]$ $\implies$ $F' = f$ $\implies$ f est primitivable sur $[a,b]$

Ce résultat, valable sur un segment $[a,b]$ se généralise facilement à un intervalle quelconque I :

$$\boxed{**\, f \text{ continue sur } I \implies F' = f \implies f \text{ est primitivable sur } I}$$

** L'autre conséquence essentielle du $TFCI_2$, est la méthode du changement de variable très pratique pour le calcul de certaines intégrales.

2.2.5 Formule du Changement de variable

L'une des principales conséquences du $TFCI_2$, est la méthode du changement de variable, qui peut transformer une intégrale difficile à calculer, en une autre relativement plus simple, à l'aide de la formule suivante :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et
f une fonction réelle continue sur $\phi([\alpha, \beta])$, Alors

$$\boxed{\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi)\phi'}$$

ou bien

$$\boxed{\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)\phi'(t)dt}$$

Démonstration

Il suffit de montrer que

$$\boxed{F_{\phi(\alpha)}(f) \circ \phi = F_\alpha(f \circ \phi.\phi')}$$

On a
f continue sur $\phi([\alpha, \beta])$
$\implies F_{\phi(\alpha)}(f)$ derivable sur $\phi([\alpha, \beta])$ et $F'_{\phi(\alpha)}(f) = f$.
ϕ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $F_{\phi(\alpha)}(f)$ derivable sur $\phi([\alpha, \beta]) \implies$
$F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $(F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi)' = F'_{\phi(\alpha)}(f)o\phi'.\phi = f(\phi)\phi'$.
D'autre part,
ϕ' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et $fo\phi$ continue sur $[\alpha, \beta]$
$\implies f(\phi)\phi'$ continue sur $[\alpha, \beta] \implies F_\alpha(f(\phi)\phi')$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$
et $F'_\alpha(f(\phi)\phi') = f(\phi)\phi'$.
On en déduit que $(F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi)' = F'_\alpha(f(\phi)\phi')$ et que
$F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi - F_\alpha(f(\phi)\phi') = K = cte$.
C'est à dire que $(\forall x \in [\alpha, \beta](F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi)(x) - F_\alpha(f(\phi)\phi')(x) = K$.
En particulier, si $x = \alpha$, on obtient $K = 0$.
En conclusion
$(\forall x \in [\alpha, \beta](F_{\phi(\alpha)}(f)o\phi)(x) = F_\alpha(f(\phi)\phi')(x)$.
et pour $x = \beta$, on arrive à la formule du changement de variable suivante :

$$\boxed{\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)\phi'(t)dt}$$

2.2.6 Formule du Changement de variable bijectif

Si la fonction ϕ, est de PLUS BIJECTIVE, en posant

$$a = \phi(\alpha) \text{ et } b = \phi(\beta),$$

on otient la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi)\phi'}$$

ou bien

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)\phi'(t)dt}$$

2.2.7 Les Changements classiques

$$x = t^2 \implies \int_{\alpha^2}^{\beta^2} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t^2)(2t)dt$$

$$x = \sin(t) \implies \int_{\sin(\alpha)}^{\sin(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sin(t))(\cos(t)dt$$

$$x = \cos(t) \implies \int_{\cos(\alpha)}^{\cos(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\cos(t))(-\sin(t)dt$$

$$x = \tan(t) \implies \int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tan(t))(1+\tan^2(t))dt$$

$$x = \frac{1}{t} \implies \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\frac{1}{t})(\frac{-1}{t^2})dt$$

$$x = e^t \implies \int_{e^{\alpha}}^{e^{\beta}} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(e^t)(e^t)dt$$

$$x = \ln(t) \implies \int_{\ln(\alpha)}^{\ln(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\ln(t))(\frac{1}{t})dt$$

$$x = \sqrt{t} \implies \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sqrt{t})(\frac{1}{2\sqrt{t}})dt$$

2.3 COMMENT Calculer une intégrale $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$

Dans cette section, on supposera que f est une fonction intégrable sur le segment $[a, b]$ et l'on voudrait calculer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$.

2.3.1 Première méthode : Basée sur la définition de Riemann

L'utilisation de cette méthode nécessite la conaissance préalable de la valeur I de $\int_a^b f$.

On montre alors que

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists p > 0) \ : \ (\forall \sigma \in S_{[a,b]})$$

$$|\sigma| < p \implies (\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}) \ (\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]) \ |\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) - I| < \epsilon$$

Visiblement, cette méthode n'est pas facile à mettre en œuvre, sauf peut être pour les fonctions du type en escaliers.

2.3.2 Deuxième méthode : Basée sur les sommes de Riemann

Si la fonction f est relativement simple, du genre $e^x, \sin(x), \cos(x), x^n$,

on peut calculer $\int_a^b f$ à l'aide des Sommes de Riemann à gauche

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})}$$

Ou, Avec les Sommes de Riemann à droite

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})}$$

Exemple 15.

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{1 - (e^{\frac{1}{n}})^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (1 - e) \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= e - 1$$

2.3.3 Troisième méthode : Basée sur le $TFCI_1$

Cette méthode est très pratique et elle est largement, la plus utilisée.

Il s'agit de trouver une primitive G de f sur $[a, b]$ et d'appliquer le $TFCI_1$, en écrivant que

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b G' = \Big[G\Big]_a^b = G(b) - G(a)}.$$

Exemple 16.

$$\int_1^2 4x^3 dx = \Big[x^4\Big]_1^2 = G(b) - G(a) = 15.$$

L'utilisation de cette méthode repose essentiellement sur l'existence et SURTOUT la connaissance d'une primitive G de f sur $[a, b]$.

Les résultats précédents montrent que le seul cas où l'on est sûr que f admet une primitive sur le segment $[a, b]$, se résume au cas où f est continue sur $[a, b]$!

Pour généraliser ce résultat, à un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, nous aurons besoin de la définition suivante :

Definition 17. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, une application numérique définie sur I.

On dit que f est LOCALEMENT Intégrable sur I si et seulement si f est intégrable, au sens de Riemann, sur tout compact (segment) de I. En d'autres termes

$$f \text{ est Localement intégrable sur } I \iff (\forall (a, b) \in I^2) f \text{ est intégrable sur } [a, b].$$

Exemple 18. Tout fonction continue sur un intervalle est Localement intégrable sur cet intervalle

Notons que cette définition sera d'une grande utilité dans la section réservée aux intégrales généralisées.

Montrons maintenant que toute fonction continue sur un intervalle est Primitivable (admet une primitive) sur cet intervalle.

Soit alors f une fonction continue sur l'intervalle I et a un point de I. Définissons la fonction intégrale F de f par

$$(\forall x \in I) \;\; F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt.$$

Soit x un élément quelconque de I.

D'après le $TFCI_2$ et étant donné que f est continue en x, F sera dérivable en x et de plus

$$F'(x) = f(x)$$

On en déduit alors que F est une primitive de f sur I.

Et si l'on connaît une autre primitive G de f sur I, alors,

$$(\forall x \in I) \;\; F(x) = \int_a^x f = \int_a^x G' = G(x) - G(a).$$

Chapitre 3

Autres Techniques du calcul intégral

Parfois, les méthodes d'intégration par parties, ou se basant sur un changement de variable ne permettent pas de trouver une primitive, nécessaire pour calculer une intégrale. Il faudra alors utiliser d'autres techniques du genre "forme canonique", "linéarisation" ou "décomposition en éléments simples".

3.1 Fractions rationnelles

Pour intégrer une fraction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, On commence par effectuer une division euclidienne pour se ramener au cas où le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du denominateur. Après quoi, on fait appel à la décomposition en éléments simples, basée sur le fait que l'ensemble $\mathbb{C}$ soit algébriquement clos, ce qui veut dire que tout polynôme $Q(z)$ de degré n, à coefficient réels, est scindé, et peut être factorisé sous la forme $Q(z) = (z - z_0)(z - z_1)...(z - z_n)$.

Etant donné que la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle fait partie du programme d'algèbre, nous allons juste expliquer, à travers quelques exemples, les techniques qui permettent de trouver les coefficients de la décomposition.

3.1.1 Décomposition en éléments simples

Exemple 19.

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

avec $d^\circ P \leq 1$.

Alors en multipliant des deux côtés par $(x - a)$ et en remplaçant x par a, on trouve

$$A = \frac{P(a)}{a-b}$$

Et en multipliant des deux côtés par $(x - b)$ et en remplaçant x par b, on trouve

$$B = \frac{P(b)}{b-a}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{P(x)}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

avec

$$A = \frac{P(2)}{2-3} = -1 \text{ et } \quad B = \frac{P(3)}{3-2} = 1$$

et finalement

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Exemple 20.

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^3(x-b)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \frac{B}{x-b}$$

avec $d^\circ P \leq 3$.

Alors, en multipliant des deux côtés par $(x-a)^3$ et en remplaçant x par a, on trouve

$$A_3 = \frac{P(a)}{a-b}$$

En multipliant des deux côtés par $(x-b)$ et en remplaçant x par b, on trouve

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)^3}$$

En multipliant des deux côtés par x et en faisant tendre x vers ∞, on trouve

$$A_1 + B = \lim_{x \to \infty} \frac{xP(x)}{(x-a)^3(x-b)}$$

En fin, pour trouver le coefficient A_2, il suffit de donner à x une valeur particulière $0, 1, ...$

Exemple 21.

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x^2+\alpha x+\beta)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2-\alpha x+\beta}$$

avec $d^\circ P \leq 2$ et $\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$.

En multipliant des deux côtés par $(x-a)$ et en remplaçant x par a, on trouve

$$A = \frac{P(a)}{a^2+\alpha a+\beta}$$

En multipliant des deux côtés par x et en faisant tendre x vers ∞, on trouve

$$A + B = \lim_{x \to \infty} \frac{xP(x)}{(x-a)(x^2+\alpha x+\beta)}$$

Pour trouver le troisième coefficient C, on donne à x une valeure particulière.

Ainsi,

$$\frac{x^2-x-10}{(x-1)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

Si l'on multiplie par $(x-1)$ et l'on remplace x par 1, on obtient

$$A = -1$$

Si l'on multiplie par x et l'on fait tendre x vers l'infini, on obtient

$$1 = A + B \implies B = 2$$

Pour trouver la constante C, il suffit de donner à x une valeur particulière, 0 par exemple. Ce qui donne

$$\frac{-10}{-5} = -A + \frac{C}{5} \implies C = 5$$

Exemple 22.

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x^2+b^2)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b^2}$$

avec $d^\circ P \leq 2$ et $\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$.

Pour trouver A, on multiplie $f(x)$ par $x-a$, puis on remplace x par a.

on trouve alors $A = \frac{P(a)}{(a^2+b^2)}$.

Pour trouver B et C, on multiplie $f(x)$ par x^2+b^2, puis on remplace x par le nombre complexe ib.

on trouve alors $Bi + C = \frac{P(ib)}{(ib-a)}$.

Ainsi

$$\frac{9+x}{x^3-x^2+4(x-1)} = \frac{P(x)}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Donc

$$A = \frac{P(1)}{1+4} = 2 \text{ et } 2iB + C = \frac{9+2i}{2i-1} = -\frac{5+20i}{5}$$

D'où

$$B = -2 \text{ et } C = -1.$$

3.1.2 Intégration des éléments simples

1. Eléments de degré 1.

$$\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \ln(|x-a|)}$$

et

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} \quad \text{avec} \quad n \neq 1}$$

2. Eléments de degré 2.
Après la mise du dénominateur sous la forme canonique et un changement de variable adéquat, on tombe sur

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x)}$$

ou

$$\boxed{\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$$

ou

$$\boxed{\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{1-n}}{1-n}}$$

ou, en fin

$$\boxed{I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}}$$

que l'on calcule à l'aide d'une intégration par parties et d'une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3.2 Fonctions Trigonométriques

3.2.1 Cas simples

Si l'intégrale à calculer se présente sous la forme $\int f(\cos(t))\sin(t)dt$, alors le changement à faire est évidemment $x = \cos(t)$.

Exemple 23.

$$\int \sin^5(t)dt = \int \sin^4(t)\sin(t)dt = \int (1-\cos^2(t))^2\sin(t)dt$$

Si l'intégrale à calculer se présente sous la forme $\int f(\sin(t))\cos(t)dt$, alors le changement à faire est évidemment $x = \sin(t)$.

Exemple 24.

$$\int \cos^7(t)dt = \int \cos^6(t)\cos(t)dt = \int (1-\sin^2(t))^3\cos(t)dt$$

Si l'intégrale à calculer se présente sous la forme $\int f(tg(t))(1+tg^2(t))dt$, alors le changement à faire est évidemment $x = tg(t)$.

3.2.2 Linéarisation

Si une intégrale se présente sous la forme $\int \sin^{2p+1}(t)dt$, alors il suffit de la transformer en $\int (1-\cos^2(t))^p \sin(t)dt$, pour voir le changement de variable à faire, à savoir $x = \cos(t)$.

De même, Si une intégrale se présente sous la forme $\int \cos^{2p+1}(t)dt$, alors il suffit de la transformer en $\int (1-\sin^2(t))^p \cos(t)dt$, pour voir le changement de variable à faire, à savoir $x = \sin(t)$.

Et lorsque l'exposant est pair, c'est à dire que l'intégrale à calculer ressemble à $\int \sin^{2p}(t)dt$, On procède à une linéarisation :

Exemple 25. Soit à calculer $\int \cos^4(t)dt$.

On part des relations d'Euler bien connues

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

puis, l'on développe à l'aide de la formule du binôme

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

et du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin^4(t) = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^4 &= \frac{1}{16}\Big((e^{4it}+e^{-4it}) + 4(e^{2it}+e^{-2it}) + 6\Big) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

L'intégration devient alors presque élémentaire.

$$\int \cos^4(t)dt = \frac{1}{32}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{3t}{8} + C^{te}.$$

De même, on trouve

$$\int \sin^4(t)dt = \frac{1}{32}\sin(4t) - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{3t}{8} + C^{te}.$$

3.2.3 Cas spéciaux

Si, pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\cos(x), \sin(x))dx$, aucun des changements classiques du type $t = \sin(x), cos(x), tg(x)...$ ne donne le résultat, on peut toujours essayer de poser

$$\tan(\frac{x}{2}) = t \quad \text{ou} \quad x = 2\arctan(t)$$

et profiter des fameuses formules

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ce changement transforme, dans certains cas, une fonction trigonométrique en une fraction rationnelle.

Exemple : Calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}dx$.

Posons $\tan(\frac{x}{2}) = t$ ou $x = 2\arctan(t)$. Donc

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$$

3.3 Fonctions Hyperboliques

Par analogie avec les fonctions trigonométriques, pour calculer l'intégrale d'une fonction hyperbolique de la forme $f(sh(x), ch(x))$, si les changements classiques du genre $t = sh(x), ch(x), th(x)$ n'aboutissent pas, On peut penser à effectuer la substitution suvante

$$th(\frac{x}{2}) = t \;\; ou \;\; x = 2argth(t)$$

et remplacer $sh(x)$ par $\frac{2t}{1-t^2}$, $\cos(x)$ par $\frac{1+t^2}{1-t^2}$, et
dx par $\frac{2dt}{1-t^2}$.

Dans certains cas, ce changement transforme une fonction hyperbolique en une fraction rationnelle.

remarque 26. *Si l'on connaît bien les formules trigonométriques, On peut facilement retrouver les formules hyperboliques.*

Pour cela, il suffit de remplacer

$$\cos \;\; par \; ch \;\; et \; \sin \;\; par \; \frac{sh}{i}$$

i étant bien sûr le nombre complexe qui vérifie $i^2 = -1$.

Ainsi, par exemple

$$1 - \cos(2t) = 2\sin^2(t) \quad devient \quad ch(2t) - 1 = 2sh^2(t)$$

3.4 Intégrales du type $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Après la mise du trinôme $ax^2 + bx + c$ sous la forme canonique et le bon changement de variable, On tombe sur l'un des trois types suivants :

1. $$\int \sqrt{1 - t^2}$$

   Il suffit alors de poser $t = \sin(u)$ ou $t = \cos(u)$.

2. $$\int \sqrt{1 + t^2}$$

   Il suffit alors de poser $t = sh(u)$.

3. $$\int \sqrt{t^2 - 1}$$

   Il suffit alors de poser $t = ch(u)$ ou $t = -ch(u)$.

Le meilleur moyen pour maîtriser les techniques du calcul intégral, consiste à faire le maximum d'exercices afin de s'assurer de la confiance en soi .

WA LKMAALOU LILLAAH ;

Dans le chapitre suivant, on s'intéressera à des intégrales sur des intervalles non bornés.

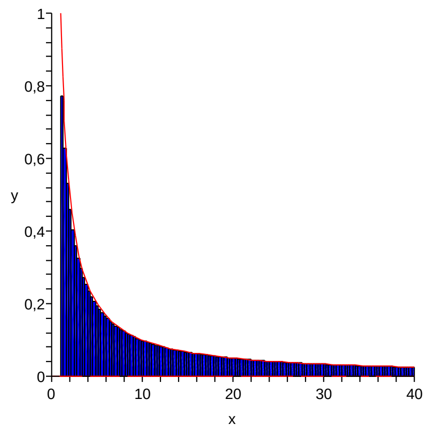

FIGURE 3.1 – intégrale Généralisée sur un intervalle non borné