Université Moulay Ismail
Module Analyse I

Faculté des Sciences, Meknès
Filière SMPC I

Analyse I

Pr. Mohamed RHOUDAF

Filière : SMPC I.

Année universitaire 2015/2016.

Table des matières

1 L'Ensemble des Nombres Réels **1**
1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés 1
1.1.1 Relations d'équivalence et d'ordre 1
1.2 Quelques éléments de logique 2
1.2.1 Implication $[A \Rightarrow B]$ 2
1.2.2 Equivalence $[A \Leftrightarrow B]$ 3
1.2.3 Raisonnement par récurrence 3
1.3 L'ensemble des nombres réels 4
1.3.1 Introduction 4
1.4 Opération sur les nombres réels 5
1.5 Ordre sur $\mathbb{R}$ 6
1.5.1 Borne supérieure-Borne inférieure 6

2 Suites Numériques **11**
2.1 Suites numériques 11
2.1.1 Suite majorée, minorée, bornée 12
2.1.2 Suites monotones 13
2.1.3 Opération élémentaires sur les suites convergentes 14
2.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes 16
2.3 Suite récurrente 19
2.3.1 Suites extraites ou sous-suites. 20
2.3.2 Suites adjacentes 21
2.3.3 Les suites de Cauchy 22
2.4 Suites arithmétiques 23
2.5 Suites géométriques 25

3 Fonctions Réelles d'une Variable Réelle **27**
3.1 Notions de fonction 27
3.1.1 Fonctions majorées, minorées, bornées 28
3.1.2 Parité et périodicité 28
3.2 Opération sur les fonctions 30
3.2.1 Somme et produit de deux fonctions 30
3.2.2 Produit d'une fonction par un nombre réel 30
3.2.3 Composition de deux fonctions 30
3.3 Limites 31
3.4 Propriétés des limites et opération 34

3.5 Fonctions continues 37
3.5.1 continuité en un point. 37
3.5.2 Prolongement par continuité. 39
3.5.3 Suites et continuité 39
3.6 Fonctions continues sur un intervalle 40
3.7 Fonctions réciproques 46
3.7.1 Rappels : injection, surjection, bijection 46
3.8 Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle 49
3.8.1 Exemples des foctions réciproques 50

4 Dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. 53
4.1 Dérivée d'une fonction 53
4.1.1 *Interprétation géométrique* 54
4.1.2 *Opérations sur les fonctions dérivables* 56
4.1.3 *Dérivée d'une fonction composée* 57
4.1.4 *Dérivée d'une fonction réciproque* 58
4.2 Dérivées successives 61
4.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^p$ 62
4.4 Extremums 63
4.4.1 *Méthode de la dérivée seconde* 64
4.4.2 *Interprétation géométrique* 66
4.5 Règles de de l' Hospital 68
4.6 Fonctions convexes 69
4.6.1 *Interprétation géométrique* 70
4.7 Plan d'étude d'une fonction 70

5 Fonctions Usuelles 73
5.1 Fonctions puissances 73
5.2 Fonction logarithme népérien 74
5.3 Fonctions exponentielles 77
5.4 Fonction logarithme de base a 79
5.5 Fonctions exponentielles de base a 80
5.6 Fonctions hyperboliques 83
5.7 Fonctions hyperboliques réciproques 84
5.7.1 *Argument cosinus hyperbolique* 84
5.7.2 *Argument sinus hyperbolique* 85
5.7.3 *Argument tangente hyperbolique* 85
5.7.4 *Argument cotangente hyperbolique* 85
5.8 Fonctions circulaires 87
5.9 Etude des fonctions circulaires 89
5.9.1 *Fonction cosinus* 89
5.9.2 *Fonction sinus* 89
5.9.3 *Fonction tangente* 90
5.9.4 *Fonction cotangente* 91
5.10 Fonctions circulaires réciproques 92
5.10.1 *Fonction Arc cosinus* 92

5.10.2 *Fonction Arc sinus* 92
5.10.3 *Fonction Arc tangente.* 93
5.10.4 *Fonction Arc cotangente* 94

6 Formules de Taylor et Développements Limités 95
6.1 Fonctions équivalentes 95
6.2 Formules de Taylor 98
6.3 Applications de la formule de Taylor 101
6.3.1 Calcul approché des valeurs d'une fonction 101
6.3.2 Démonstration d'inégalités 102
6.3.3 Ordre de multiplicité des racines d'une équation 102
6.4 Développements limités 102
6.5 Développements limités usuels 105
6.6 Opérations sur les développements limités 105
6.6.1 Développement limité d'une somme 106
6.6.2 Développement limité d'un produit 106
6.6.3 Développement limité d'un quotient 106
6.6.4 Développement limité d'une composée 108
6.6.5 Intégration d'un développement limité : 109
6.6.6 Dérivation d'un développement limité 110
6.6.7 Développements limités au voisinage de l'infini 112
6.7 Développements limités généralisés 112
6.8 Applications des développements limités 113
6.8.1 Calculs des limites 113
6.8.2 Calcul des dérivées n^{iemes} en un point : 118
6.8.3 Calcul des coefficients d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle 118

7 Courbes Paramétrées 123
7.1 Définition 123
7.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée 123
7.2.1 Domaine de définition et dérivabilité 123
7.2.2 Réduction du domaine d'étude 123
7.2.3 Étude des variations de x et y 124
7.2.4 Étude des branches infinies 125
7.2.5 Étude des points particuliers 126
7.2.6 Étude de la convexité 127
7.2.7 Traçage de la courbe 128
7.3 Exemple 128
7.3.1 Une étude complète 129
7.3.2 Une courbe de Lissajous 133
7.3.3 Le folium de Descartes 134

8 Séries et Examens 137

Bibliographie 151

1

L'Ensemble des Nombres Réels

1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés

1.1.1 Relations d'équivalence et d'ordre

Définition Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est dite

1. Réflexive, si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
2. Symétrique, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$.
3. Antisymétrique, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent $x = y$.
4. Transitive, si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ impliquent $x\mathcal{R}z$.
5. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

***Exemple* 1.** : Dans $\mathbb{N}$ la relation, pour tout x et y, $x \leq y$ est réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une relation d'ordre. Il en est de même des relations notées de la même manière dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Définition Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et

transitive.
• Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre on dit que E est un ensemble ordonné.
• Si E est un ensemble ordonné tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné.

***Exemple* 2.** : L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$, où $\leq$ est l'ordre naturel, est un ensemble totalement ordonné.

***Exemple* 3.** : La relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par : x divise y, notée x/y, qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$: $y = kx$, est une relation d'ordre. En effet :
On a : $x = 1x$ donc x/x par suite la relation / est réflexive.
Si x/y et y/x alors on peut trouver k et k' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $y = kx$ et $x = k'y$. Donc $x = k'y = k'kx$ par suite $k = k' = 1$ c'est-à dire que $x = y$. Ainsi, la relation / est antisymétrique.
Si x/y et y/z alors on peut trouver k et k' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $y = kx$ et $z = k'y$ donc $z = k'y = k'kx$ avec $kk' \in \mathbb{N}^*$, donc x/z. Par suite la relation / est transitive.

***Remarque* 1.1.** $(\mathbb{N}, /)$ n'est pas totalement ordonné car par exemple : 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2.

1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Implication $[A \Rightarrow B]$

La proposition A implique B, notée $[A \Rightarrow B]$ veut dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi. Par contre, si la propriété A n'est pas vrai (on dit aussi, A est fausse ou encore, non A est vraie), on ne peut rien dire de la propriété B.

***Exemple* 4.**
$$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1.$$
Cette proposition s'exprime en disant que la propriété A implique la propriété B. la propriété A s'appelle l'hypothèse et la propriété B s'appelle la conclusion. Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse A à la conclusion B s'appelle une démonstration. Un énoncé logiquement équivalent à la proposition
$$[A \Rightarrow B]$$
est
$$[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A].$$
Lorsque l'on veut démontrer $[A \Rightarrow B]$, on peut procéder par contraposée et démontrer $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$. Une autre façon de démontrer la proposition $[A \Rightarrow B]$ est de procéder par l'absurde, c'est à dire de supposer que les propriétés A et non B sont vraies toutes les deux et d'en déduire une contradiction.

***Exemple* 5.** La propriété de l'exemple ci-dessus s'exprime par l'absurde en

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad a^2 \neq 1$$

est une contradiction.

1.2.2 Equivalence $[A \Leftrightarrow B]$

La proposition $[A \Leftrightarrow B]$ veut dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi, c'est à dire $[A \Rightarrow B]$ et si la propriété B est vraie, alors la propriété A l'est aussi, c'est à dire $[B \Rightarrow A]$. Les propriétés A et B sont donc vraies en même temps et fausses en même temps.

***Exemple* 6.** Dans $\mathbb{R}$ la propriété $a^2 = 1$ n'est pas équivalente à la propriété $a = 1$. En effet, le réel $a = -1$ est tel que $a^2 = 1$ et $a \neq 1$. Donc

$$[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$$

et

$$[a^2 = 1 \nRightarrow a = 1].$$

1.2.3 Raisonnement par récurrence

On cherche à démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on démontre la première propriété, en général $P(0) ou P(1)$. Puis, on prouve que pour n quelconque, si les propriétés $P(0), P(1) .... P(n)$ sont vraies, la propriété $P(n+1)$ l'est aussi. Alors, de proche en proche à partir de la première propriété, on peut montrer que toutes les propriétés $P(n)$ sont vraies. Le schéma de démonstration est donc le suivant :

$$\left.\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(0), P(1), ..., P(n) \ \text{ vraie} \Longrightarrow P(n+1) \ \text{ vraie} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie}$$

Très souvent, la propriété $P(n)$ suffit à entraîner la propriété $P(n+1)$. Le schéma suivant, moins général mais plus fréquent, est aussi une démonstration par récurrence

$$\left.\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \ \text{ vraie} \Longrightarrow P(n+1) \end{cases}\right\} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie}$$

***Exemple* 7.**

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

La propriété $P(1)$ est vraie : en effet, en faisant $n = 1$ ci-dessus, on trouve $1 = 1$. Supposons donc que la propriété $P(n)$ est vraie. A partir de

$$P(n) : 1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

on calcule

$$P(n+1) : 1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On peut donc passer de l'ordre n à l'ordre $n+1$. On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3 L'ensemble des nombres réels

1.3.1 Introduction

Les mathématiques de base s'intéressent à certains objets appelés nombres et à des opérations sur ceux ci. La suite infinie de symboles $0, 1, 2, 3...$ que nous utilisons pour dénombrer est appelée l'ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \cdots\}.$$

Quand on cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation du premier degré en la variable x, $a + x = b$. On obtient la solution lorsque $b > a$. Dans le cas où a est supérieur à b, on peut se ramener au cas où b est nul à l'équation :

$$n + x = 0.$$

On découvre avec "inquiétude" que cette équation n'a pas de solution dans son univers habituel d'entiers naturels. D'où la nécessité de postuler l'existence d'un nouveau nombre, qu'on note par exemple $-n$ et qui satisfait à cette équation. C'est la création de nouveaux nombres, que le mathématicien appellera entiers négatifs. L'ensemble des entiers négatifs et des entiers naturels est appelé l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..... - 2, -1, 0, 1, 2 \cdots\}.$$

Remarquons tout de suite qu'un entier quelconque n de $\mathbb{Z}$ étant donné, l'équation $n + x = 0$, admet toujours une solution dans $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{Z}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{N}$ pour l'équation $n + x = 0$.
Quand on cherche à résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $a + bx = 0$, a et b sont deux entiers. Si par exemple $a = 4b$ cette équation admet bien une solution dans $\mathbb{Z}$. Par contre si $b = 2a$ cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On décide donc de créer un nouvel objet qu'on appellera encore un nombre, et pour le distinguer d'un entier, on le qualifiera de fractionnaire ou de rationnel. Ainsi, se donner les rationnels

$$\frac{a}{b} = n \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} = m$$

revient à affirmer, par définition, que :

$$bn - a = 0 \quad \text{et} \quad dm - c = 0.$$

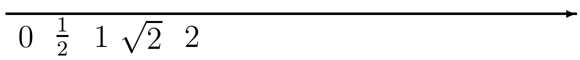
Compte tenu des propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$, on déduit aussitôt de cette définition des rationnels leurs propriétés habituelles. L'ensemble des fractions rationnelles noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Muni de l'addition et de la multiplication l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un corps, qui est stable par addition, soustraction, multiplication et division. Mais constatons l'existence de nombres autres que les rationnels par l'une ou l'autre des considérations suivantes.

1. La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un nombre rationnel.
2. La circonférence d'un cercle de rayon 1 qui est π n'est pas un rationnel.
3. $\sqrt{2}, \pi$... sont des irrationnels.

L'ensemble des nombres rationnels et des irrationnels constituent l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous présumons que l'ensemble des nombres réels peut être mis en correspondance biunivoque (i.e à chaque réel correspond un et un seul point de la droite) avec tous les points d'une droite.



$Fig.1$

Avant de donner une description de la droite réelle, nous commençons par rappeler quelques éléments de logique mathématiques.

1.4 Opération sur les nombres réels

On rappel ici les propriétés algébriques qui seront constamment utilisées dans ce cours d'analyse. Pour plus de détails consulter sur le sujet le cours d'algèbre des filières *SMPCI* et *SMA*. On désignera par $(\mathbb{R}, +, \times)$ l'ensemble des nombres réels muni des deux opérations, notées $+$ et $\times$, appelées respectivement addition et multiplication. Si $x, y \in \mathbb{R}$ on note le produit $x \times y$ par xy.
Les opérations $+$ et $\times$ vérifient les propriétés suivantes :

1. L'addition est commutative : Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a : $x + y = y + x$.
2. L'addition est associative : Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a : $x+(y+z) = (x+y)+z$.
3. Il existe un élément noté 0 dans $\mathbb{R}$, appelé élément neutre pour l'addition, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a : $0 + x = x + 0 = x$.
4. Pour tout élément x dans $\mathbb{R}$, il existe un élément noté $(-x)$ dans R, appelé opposé de x, tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
5. La multiplication est commutative :
   Pour tout (x, y) dans R^2 on a : $xy = yx$.
6. La multiplication est associative : Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a : $x(yz) = (xy)z$.
7. Il existe un élément noté 1 dans $\mathbb{R}$, appelé élément neutre pour la multiplication, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a : $1x = x1 = x$.

8. Pour tout élément $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe un élément noté $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}$, appelé inverse de x tel que : $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.
9. La multiplication est distributive par rapport à l'addition : Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a : $x(y + z) = xy + yz$.

Nous exprimons ces propriétés par :

Propriété L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

1.5 Ordre sur $\mathbb{R}$

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre, notée $\leq$, qui prolonge la relation d'ordre total naturel définie sur $\mathbb{N}$. On a :

Propriété L'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné et la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication :
- Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$.
- Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.
- Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ tel que $x \leq y$, alors

$zx \leq zy$ si $z \geq 0$ et $zy \leq zx$ si $z \leq 0$.

***Remarque* 1.2.** . Si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$, alors il existe un réel z tel que $x < z < y$; il suffit de prendre $z = \frac{x+y}{2}$

***Remarque* 1.3.** . Si un réel $x \geq 0$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $x \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.
En effet, si $x \neq 0$ on peut trouver, d'après la remarque (1.3.1), un réel ε' tel que $0 < \varepsilon' < x$.

1.5.1 Borne supérieure-Borne inférieure

Définition Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, F une partie non vide de E et $M \in E$.
- On dit que M est un majorant de F si pour tout $x \in F$, $x \leq M$.
- On dit que m est un minorant de F si pour tout $x \in F$, $x \geq m$.
- L'ensemble F est dit majoré s'il admet au moins un majorant.

• L'ensemble F est dit minoré s'il admet au moins un minorant.
• On dit que F est borné s'il est majoré et minoré.
• On appelle plus grand élément de F, s'il existe, l'unique élément $q \in F$ tel que : pour tout $x \in F$, $x \leq q$.
• On appelle plus petit élément de F, s'il existe, l'unique élément $p \in F$ tel que : pour tout $x \in F$, $p \leq x$.

***Exemple* 8.** : L'ensemble $F = \{2, 3, 12\}$ est borné dans $(\mathbb{N}^*, /)$. En effet, l'ensemble F est majoré par 12 car on a : 2/12, 3/12 et 12/12. On a aussi F minoré par 1 car 1/2, 1/3 et 1/12.
La partie F n'admet pas de plus petit élément dans ($N^*, /)$ car 2 ne divise pas 3, par contre, 12 est le plus grand élément de F.

***Remarque* 1.4.** Soit F une partie d'un ensemble ordonné E.

1. Si M est un majorant de F, alors tout élément de E supérieur à M, est un majorant de F.
2. Si m est un minorant de F, alors tout élément de E inférieur à m, est un minorant de F.
3. Un majorant ou un minorant de F peut être un élément de F ou non. C'est l'exemple de l'élément 1 qui est un minorant de F mais il n'appartient pas à F ; alors que 12 est un majorant de F qui appartient à F.
4. L'ensemble des majorants ou des minorants de F peut être fini ou non.

Dans l'exemple précedent l'ensemble des minorants de F est $\{1\}$, donc fini. Alors que l'ensemble de ses majorants est formé par les multiples de 12, qui est un ensemble infini.

Définition Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E.
▶ On appelle borne supérieure de F, notée $sup(F)$, le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de F.
▶ On appelle borne inférieure de F, notée $inf(F)$, le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de F.

***Exemple* 9.** . La partie $F = \{2, 3, 12\}$ de ($N^*, /)$ admet 12 pour borne supérieure et 1 pour borne inférieure. Notons que $1 \notin F$, alors que $12 \in F$.

***Remarque* 1.5.** : Si F admet un plus grand (resp. plus petit) élément, alors cet élément est la borne supérieure (resp. inférieure) de F.
Avant d'aller plus loin ; nous ouvrons une parenthèse pour rappeler brièvement la construction des nombres et les différents types de raisonnement mathématique. **Caractérisation des bornes supérieure et inférieure**

Propriété Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et on a :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall \;\; x \in A \quad x \leq M \\ \forall \;\; \varepsilon > 0, \; \exists \;\; x_0 \in A : \quad M - \varepsilon < a \leq M. \end{cases}$$

Toute partie A non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et on a :

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall \;\; x \in A \quad m \leq x \\ \forall \;\; \varepsilon > 0, \; \exists \;\; x_0 \in A : \quad m \leq x_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Théorème L'ensemble, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \;\; Z, q \neq 0\}$, des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie qu'entre deux réels x et y distincts il existe une infinité de nombres rationnels.

Archimède Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n tel que : $x < n$.

Preuve : Raisonnons par absurde : Supposons le contraire c'est-à dire qu'il existe $x \in \;\; R$ tel que $x \geq n$ pour tout entier naturel n, donc $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$ par suite $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure.
Soit $M = sup(\mathbb{N})$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < n$ car $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant. Or, si on prend $\varepsilon = 1$, on aura $M < n + 1$ ce qui est absurde car $n + 1 \in \mathbb{N}$ et M est un majorant de $\mathbb{N}$.

Définition On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, le réel positif, notée $|x|$, défini par :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0 - x \quad \text{si} \quad x \leq 0.$$

Propriété La valeur absolue vérifie les proriétés suivantes :

1. $|-x| = |x|$.
2. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3. Pour tous x et y dans R, $|xy| = |x||y|$.
4. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.
5. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

***Remarque* 1.6.** Si $a \geq 0$ l'inégalité $|x| \leq a$ signifie que : $-a \leq x \leq a$.

Formule du binôme Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p a^p b^{n-p},$$

où $\mathcal{C}_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. et $0! = 1$.

Rappelons ici la notion d'intervalle et de voisinage de la droite réelle :

Définition Soient a et b deux nombres réels distincts $(a < b)$.
▶ On appelle intervalle fermé, d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
▶ On appelle intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ : a < x < b\}$.
▶ On appelle voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, toute partie, notée $\mathcal{V}(x_o)$, de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $x_0 \in \ ]a, b[$.
▶ On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : x \geq a\}$
▶ On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ : x \leq a\}$.

***Remarque* 1.7.** Soient $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0 si et seulement si il existe $h > 0$ tel que : $]x_0 - h, x_0 + h[\subset \mathcal{V}$.
Dans la suite on appellera voisinage de x_0 tout intervalle ouvert de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[$; $h > 0$.

2

Suites Numériques

2.1 Suites numériques

Définition Une suite numérique est une application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u: \ I \longrightarrow \mathbb{R} \ n \longrightarrow u(n) = u_n.$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ s'appelle le terme général de la suite. La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou tout simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$. L'ensemble $\{u(n) : n \in I\}$ est appelé ensemble des valeurs de la suite.

***Exemple* 10.** $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

***Exemple* 11.** $u_n = (-1)^n, \ n \geq 1$.

Définition On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

***Exemple* 12.** La suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0.

En effet, soit $\varepsilon > 0$, appliquons le théorème d'Archimède pour $\dfrac{1}{\varepsilon}$, il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{\varepsilon} < N_0$, il suffit donc de prendre $N_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.
Rappelons que $E(x)$ représente la partie entière de x ; c'est le plus grand entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Définition (Divergence vers $\pm\infty$)
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle, diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si $\forall A > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0$

$$u_n > A \qquad (\text{resp. } u_n < -A)$$

Propriété Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Démonstration. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \frac{|\ell-\ell'|}{2}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$.

De même $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - \ell'| < \epsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$|u_N - \ell| < \epsilon \quad \text{et} \quad |u_N - \ell'| < \epsilon$$

Donc $|\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leq |\ell - u_N| + |u_N - \ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell-\ell'| \leq \epsilon+\epsilon = 2\epsilon < |\ell-\ell'|$. On vient d'aboutir à l'inégalité $|\ell-\ell'| < |\ell-\ell'|$ qui est impossible. Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell = \ell'$.

■

2.1.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.

– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Propriété Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ. En appliquant la définition de limite avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq 1$, et donc pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1.$$

Donc si on pose

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N} \ \ |u_n| \leq M$.

■

***Remarque* 2.1.** La réciproque est fausse .

***Exemple* 13.** La suite $(-1)^n$, $n \geq 1$, est bornée mais n'est pas bornée.

2.1.2 Suites monotones

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème
– Toute suite croissante et majorée est convergente.
– Toute suite décroissante et minorée est convergente.

***Remarque* 2.2.**

– Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
– Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Notons $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majorée par M, et de plus il est non vide est bornée, donc il admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup A$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_{N_0} de A tel que $\ell - \epsilon < u_{N_0} \leq \ell$. Mais alors pour $n \geq N_0$ on a $\ell - \epsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq \ell$, et donc $|u_n - \ell| \leq \epsilon$.

■

2.1.3 Opération élémentaires sur les suites convergentes

Propriété Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2. Alors

1. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.
3. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$.
4. Si $l_1 \neq 0$, alors il existe un entier N tel que $u_n \neq 0$ si $n \geq N$ et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers $\dfrac{1}{l_1}$.

Démonstration. 1. Montrons que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ implique $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad$ tels que pour $n \geq N_1$ on a

$$|u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$ implique $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad$ tels que pour $n \geq N_2$ on a

$$|v_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = max(N_1, N_2) \in \mathbb{N} \quad$ tels que pour $n \geq N$ on a

$$|u_n + v_n - (l_1 + l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve le résultat.

2. Montrons que la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$
on distingue deux cas :
1^{er} cas si $l_2 \neq 0$ ou $(l_1 \neq 0)$
La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée c.à.d
$\exists M > 0$ tq. $|u_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ implique pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2|l_2|} > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad$ tels que

pour $n \geq N_1$ on a

$$|u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2|l_2|}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$ implique pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2|M|} > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N_2$ on a

$$|v_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

donc pour $\varepsilon > 0 \quad \exists N = max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on a

$$|u_nv_n - l_1l_2| = |u_nv_n - u_nl_2 + u_nl_2 - l_1l_2| \leq |u_n||v_n - l_2| + |v||u_n - l_1| < \varepsilon.$$

ce qui montre que (u_nv_n) converge vers l_1l_2.
1^{er} cas si $l_1 = l_2 = 0)$
La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée c.à.d
$\exists M > 0$ tq. $|u_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$ implique pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|M|} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on a

$$|v_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{M}$$

donc

$$|u_nv_n - 0| \leq |u_n||v_n| < \varepsilon.$$

3. Montrons que la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$. on a $||u_n| - |l_1|| \leq |u_n - l_1|$ donc $||u_n| - |l_1|| < \varepsilon$ si $|u_n - l_1| < \varepsilon$.

4. Enfin, si (u_n) converge vers $l_1 \neq 0$, on prend $\varepsilon = \dfrac{|l_1|}{2}$, il existe alors un entier N tel que $|u_n - l_1| < \dfrac{|u|}{2}$ si $n \geq N$ donc

$$u - \frac{|l_1|}{2} \leq u_n \leq l_1 + \frac{|l_1|}{2},$$

en particulier si $n \geq N$ on obtient $u_n > \dfrac{l_1}{2} > 0$ si $l_1 > 0$ et $u_n < \dfrac{l_1}{2} < 0$ si $l_1 < 0$, par suite pour $n \geq N$, les termes de la suite sont non nuls. Plus précisement on a montré que $|u_n| > \dfrac{|l_1|}{2}$, donc ils sont de même signe que l_1. On peut alors définir, pour $n \geq N$, la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$. Montrons que cette suite converge vers $\dfrac{1}{l_1}$. On a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}\right| = \frac{|u_n - l_1|}{|u_nl_1|}$$

Pour $\varepsilon' = \frac{|l_1|\varepsilon}{2} > 0$, il existe N' tel que $n \geq N'$ implique $|u_n - l_1| < \varepsilon'$.

De plus, $|u_n| > \dfrac{|l_1|}{2}$ si $n \geq N$. Donc si $n \geq \max(N, N')$ on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}\right| < \frac{2\varepsilon'}{l_1^2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat.

■

2.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Propriété

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration. *En posant* $w_n = v_n - u_n$, *on se ramène à montrer que si une suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie* $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$ *et converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} w_n \geq 0$. *On procède par l'absurde en supposant que* $\ell = \lim_{n\to+\infty} w_n < 0$. *En prenant* $\epsilon = |\frac{\ell}{2}|$ *dans la définition de limite , on obtient qu'il existe un entier naturel* N *tel que* $n \geq N$ *implique* $|w_n - \ell| < \epsilon = -\frac{\ell}{2}$. *En particulier on a pour* $n \geq N$ *que* $w_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$, *une contradiction.*

■

***Remarque* 2.3.**

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
2. *Attention : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, *on ne peut pas affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que* $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$. *Par exemple la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donnée par* $u_n = \frac{1}{n+1}$ *est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.*

Théorème de gendarme *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites réelles telles que :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a :

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; puisque les suites $(u_n)_n$, et (w_n) convergent vers ℓ, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Leftrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Leftrightarrow |w_n - \ell| \leq \epsilon).$$

En notant $N_0 = Max(N, N_1, N_2)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \epsilon \Leftrightarrow |v_n - \ell| \leq \epsilon. \\ |w_n - \ell| \leq \epsilon \end{cases}$$

Donc la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

■

***Exemple* 14.** *Etudier la suite de terme général*

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}; \quad n \geq 1.$$

u_n est la somme de $2n+2$ termes majorés par $\frac{n}{n^2}$ et minorés par $\frac{n}{(n+1)^2}$, donc quelque soit $n \in \ N^*$

$$(2n+2)\frac{n}{(n+1)^2} \leq u_n \leq (2n+2)\frac{n}{n^2}.$$

La suite de terme général $v_n = \frac{n(2n+2)}{(n+1)^2}$ est convergente et a pour limite 2. La suite de terme général $w_n = \frac{n(2n+2)}{n^2}$ est convergente et a pour limite 2. En conséquence la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite 2.

***Remarque* 2.4.** *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} w_n = l'$, *et* $l \neq l'$, *on ne peut rien dire de* v_n.

***Exemple* 15.**

$$u_n = -2 + \frac{1}{n}, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2, \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 2$$

- *Si on prend* $v_n = \frac{1}{n}$, *on a :* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ *et* $u_n \le v_n \le w_n$.
- *Si on prend* $v_n = (-1)^n$ *n'a pas de limite bien que :* $u_n \le v_n \le w_n$.

***Remarque* 2.5.**

1. *Si* $u_n \to u \in \mathbb{R}$ *et* $v_n \to +\infty$. *Alors*
   a) $u_n + v_n \to +\infty$ *et*
   b) $\dfrac{1}{v_n} \to 0^+$.
   c) *Si* $u > 0$, $u_n v_n \to +\infty$.
   d) *Si* $u < 0$, $u_n v_n \to -\infty$.
   e) *Si* $u = 0$ *on ne peut rien dire de la suite* $(u_n v_n)$.*(forme indéterminée)*
2. *Si* $u_n \to u \in \mathbb{R}$ *et* $v_n \to -\infty$. *Alors*
   a) $u_n + v_n \to -\infty$,
   b) $\dfrac{1}{v_n} \to 0^-$.
   c) *Si* $u > 0$ $u_n v_n \to -\infty$.
   d) *Si* $u < 0$ $u_n v_n \to +\infty$.
   e) *Si* $u = 0$ *on ne peut rien dire de la suite* $(u_n v_n)$.*(forme indéterminée)*

***Exemple* 16.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{n}$.*(la limite du produit est* 1*)*

***Exemple* 17.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.*(limite du produit est* $+\infty$*).*

***Exemple* 18.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{n^2}$.*(limite du produit est* 0*)*

Si $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to -\infty$, *on ne peut rien dire de la suite* $(u_n + v_n)$. *(forme indéterminée)*

***Exemple* 19.** $u_n = n+1, v_n = -n$.

***Exemple* 20.** $u_n = n+1, v_n = -n^2, u_n + v_n \to -\infty$.

***Exemple* 21.** $u_n = n + (-1)^n, v_n = -n, u_n + v_n$ *n'a pas de limite.*

***Remarque* 2.6.** *.Si* $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to +\infty$, *on peut rien dire de* $\dfrac{u_n}{v_n}$. *(forme indéterminée)*

***Exemple* 22.** $u_n = n+1$ *et* $v_n = n$

***Exemple* 23.** $u_n = n+1$ *et* $v_n = \sqrt{n}$

***Exemple* 24.** $u_n = n+1$ *et* $v_n = n^2$

***Remarque* 2.7.** *.Si* $u_n \to 0$ *et* $v_n \to 0$, *on peut rien dire de* $\dfrac{u_n}{v_n}$.*(forme indéterminée)*

***Exemple* 25.** $u_n = \frac{1}{n}, u_n = \frac{1}{n^2}$, *le rapport tend vers* $+\infty$.

***Exemple* 26.** $u_n = \frac{1}{n^2}, u_n = \frac{1}{n}$, *le rapport tend vers* 0.

***Exemple* 27.** $u_n = \frac{1}{n}, u_n = \frac{1}{n+1}$, *le rapport tend vers* 1.

***Remarque* 2.8.** *Si* $u_n \to \infty$ *et* $v_n \to 0$, *on peut rien dire de* $u_n^{v_n}$.*(forme indéterminée)*

***Remarque* 2.9.** *Si* $u_n \to 1$ *et* $v_n \to \infty$, *on peut rien dire de* $u_n^{v_n}$.*(forme indéterminée)*

***Exemple* 28.** $u_n = \sqrt{n}, v_n = \frac{1}{n}$, $u_n^{v_n}$ *tend vers 1.*

***Exemple* 29.** $u_n = 1 + \frac{1}{n}, v_n = n$, $u_n^{v_n}$ *tend vers exp(1).*

2.3 Suite récurrente

Définition *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par le couple* (a, f), *où* a *est un réel et* f *une fonction réelle de variable réelle, telle que*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Le résultat principal concernant les suites récurrentes est résumé dans la proposition suivante.

Propriété *Soit* f *une fonction continue sur* $I = [a, b]$ *telle que* $f(I) \subset I$ *et soit* (u_n) *la suite définie par :* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 \in I$ *donné. On a :*
1. Si (u_n) *converge vers* l *alors* $l = f(l)$.
2. Si f *est croissante alors* (u_n) *est monotone et convergente.*

Démonstration. 1. La condition $f(I) \subset I$ implique que $u_n \in I$ pour tout n.
Si $u_n \to u$ alors $f(u_n) \longrightarrow f(u)$, grâce à la continuité de f en u. D'autre part les suites (u_n) et (u_{n+1}) ayant la même limite, on conclut, que $u = f(u)$.
2. 1^{er} cas : Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante, en effet (par récurrence) :
Si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. La suite (u_n) étant croissante majorée par b donc convergente.
2^e cas : Si $u_0 \geq u_1$ on montre de la même façon que (u_n) est décroissante minorée par a donc convergente.

∎

***Exemple* 30.** *Soit la suite u_n définie par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

Si $u_0 \in [0,2[$ alors u_n est croissante, majorée. Si $u_0 \geq 0$ alors u_n est décroissante, minorée.

***Exemple* 31.** *Etudier la suite*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Pour cet exemple on utilisera le lemme suivant :

***Remarque* 2.10.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si les sous suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend vers l.*

Propriété *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*
- *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.*
- *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.*

Il se peut (ou pas !) que $\ell = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante.
Et on applique la propriété 2.3 à la fonction $f \circ f$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$,...

De même en partant de u_1 et $u_3 = f \circ f(u_1)$,...

■

2.3.1 Suites extraites ou sous-suites.

Définition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite ou (sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, òu $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

***Remarque* 2.11.** *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.on montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\varphi(n) \geq n$.*

Propriété *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si et seulement si pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.*

Démonstration. $\Rightarrow$
Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de limite , il existe un entier naturel N tel que $n \geq N$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$. Comme l'application φ est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\varphi(n) \geq n$. Ceci implique en particulier que si $n \geq N$, alors aussi $\varphi(n) \geq N$, et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \epsilon$. Donc la définition de limite s'applique aussi à la suite extraite.
$\Leftarrow$
il suffit de prendre $\varphi(n) = n$

■

Corollaire 2.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

***Exemple* 32.** *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait ces deux sous-suites sont constantes). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Théorème de Bolzano-Weierstrasss *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

2.3.2 Suites adjacentes

Définition *On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :*
1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Propriété *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

Preuve : *Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.*
Montrons, par absurde, que $u_n \leq v_n$ pour tout n.
Supposons qu'il existe N tel que $\alpha = u_N - v_N > 0$, donc pour $n \geq N$ on a : $u_n \geq u_N$ et $v_N \geq v_n$ par suite

$$u_n - v_n \geq u_N - v_N = \alpha > 0$$

pour tout $n \geq N$ ce qui est impossible car $u_n - v_n$ tend vers 0.
Par suite, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, on en déduit que :

La suite (u_n) *est croissante majorée par* v_0 *donc convergente vers* l.
La suite (v_n) *est décroissante minorée par* u_0 *donc convergente vers* l'.
La suite $(u_n - v_n)$ *converge vers* $l - l' = 0$ *donc* $l = l'$.

***Exemple* 33.** *. Les suites données par* (u_n) *et* $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, \quad n \geq 1,$$

sont adjacentes. En effet
La suite (u_n) *est croissante car :* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$.
La suite (v_n) *est décroissante car :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left[n + n(n+1) - (n+1)^2\right] \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

De plus $v_n - u_n = \dfrac{1}{n.n!} \to 0$. *Donc* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes. On en déduit que* (u_n) *et* (v_n) *convergent.*

***Exemple* 34.** *. Les suites données par* (u_n) *et* $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}, v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes. Voici enfin deux théorème très siuvant utilisé pour calculer des limités de suites.

2.3.3 Les suites de Cauchy

Définition *Une suite réelle* $(u_n)_n$ *est dite* de Cauchy *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad tel\ que \quad \forall p \geq q \geq n_0, \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Propriété *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ est\ de\ Cauchy \ \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ converge$$

Démonstration. Le sens direct

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy } \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

est vrai dans $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_n$ converge vers a, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - a| \leqslant \epsilon$. Donc

$$\forall n \geqslant m \geqslant n_0 \qquad |u_n - u_m| \leqslant |u_n - a| + |a - u_m| \leqslant 2\epsilon$$

Démontrons maintenant la réciproque

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy.}$$

Cette réciproque définit les espaces complets. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Donc en particulier $\forall p \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_p| &\leq |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ &\leq \epsilon + |u_{n_0}|. \end{aligned}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max(\max_{n<n_0} |u_n|, \epsilon + |u_{n_0}|),$$

i.e. $(u_n)_n$ est bornée et donc par Bolzano-Weiertrass, on peut en extraire une sous-suite convergente, $u_{\varphi(n)} \to a$. Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_{\varphi(n)} - a| \leq \epsilon$. On a donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - a| \leq 2\epsilon \quad \text{car} \quad \varphi(n) \geq n \geq \max(n_0, n_1).$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente.

■

2.4 Suites arithmétiques

Définition *Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n*

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Propriété *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preuve : *Raisonnons par récurrence : Pour $n = 0$, on a $u_0 = u_0$. Supposons que la propriété est vraie pour n, et montrons qu'elle reste également vraie pour $n+1$. On a par définition :*

$$u_{n+1} = u_n + r = (u_0 + nr) + r = u_0 + (n+1)r$$

donc la propriété est vraie pour $n+1$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n.

***Remarque* 2.12.** *: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*
Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante.
Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Preuve : *Soit $p \in \ N$ tel que $0 \leq p \leq n$, alors*

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + npr + u_0 + (n-p)r = u_0 + u_n,$$

il en résulte, si on écrit : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_n$
$S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{n-p} + \cdots + u_0$ et en faisant la somme, que $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$.

***Remarque* 2.13.** *: Si le premier terme de la suite est u_1, alors*

$$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}.$$

***Exemple* 35.** *. La suite (u_n) définie par $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 donc :*

$$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison 2 donc :

$$S_n = 1 + 3 + ... + (2n+1) = \frac{(n+1)(1 + 2n + 1)}{2} = (n+1)^2.$$

2.5 Suites géométriques

Définition *Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

Remarque : *Si $q = 0$ tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut être, u_0. Nous supposerons dans la suite que $q \neq 0$.*

Propriété *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :*

$$u_n = q^n u_0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preuve : *Pour $n = 0$, on a $u_0 = q^0 u_0 = u_0$. Supposons la propriété vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a par définition : $u_{n+1} = qu_n = q(q^n u_0) = q^{n+1} u_0$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n.*

Propriété *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad si \quad q \neq 1 S_n = (n + 1)u_0 \quad si \quad q = 1.$$

En particulier, si $0 < |q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = u_0 \dfrac{1}{1 - q}$.

Preuve : *On a : $S_n = u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 = u_0(1 + q + \cdots + q^n)$ donc*

$$S_n - qS_n = (1 - q)S_n = u_0(1 - q^{n+1})$$

par suite si $q \neq 1$ on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$ on a : $u_n = u_0$ pour tout n et S_n contient $n + 1$ termes.
Si $0 < |q| < 1$ alors $q^n \to 0$,

.

3

Fonctions Réelles d'une Variable Réelle

3.1 Notions de fonction

Définition *On appelle fonction numérique, toute application f définie d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:*

$$f : \begin{array}{ll} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

l'ensemble D, noté D_f, est appelé domaine de définition de f.
L'ensemble $C_f = \{(x, f(x)),\ x \in D_f\}$ est appelé courbe représentative, ou graphe , de f.

***Remarque* 3.1.** *Dans la suite, on appellera fonction toute fonction numérique d'une variable réelle.*

***Exemple* 36.** *Soient a et b deux nombres réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'appelle une fonction affine. Elle est définie sur toute la droite réelle.*

***Exemple* 37.** *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.*

***Exemple* 38.** *La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $]-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty[$.*

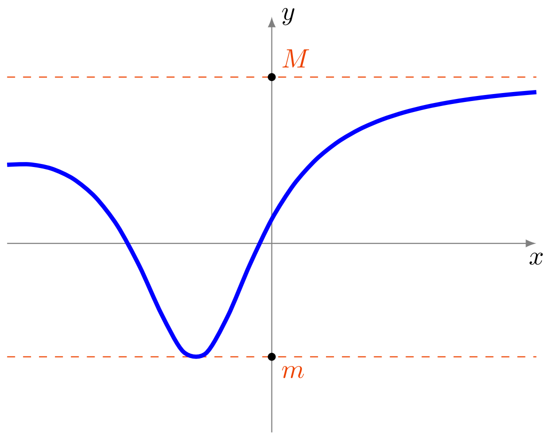
***Exemple* 39.** *La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$*

***Exemple* 40.** *La fonction $f(x) = \sin(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.*

3.1.1 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :*
- $f \geq g$ *si* $\forall x \in D\ f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ *si* $\forall x \in D\ f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ *si* $\forall x \in D\ f(x) > 0$;
- f *est dite constante sur* D *si* $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ f(x) = a$;
- f *est dite nulle sur* D *si* $\forall x \in D\ f(x) = 0$.

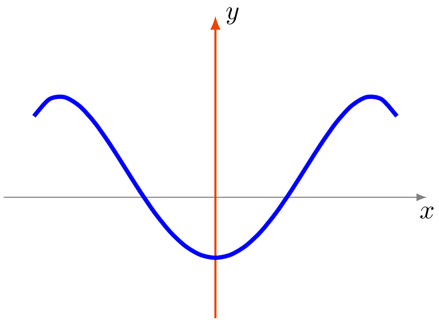
Définition *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*
- f *est majorée sur* D *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* D *si* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\ f(x) \geq m$;
- f *est bornée sur* D *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* D*, c'est-à -dire si* $\exists M > 0 \quad \forall x \in D\ |f(x)| \leq M$.

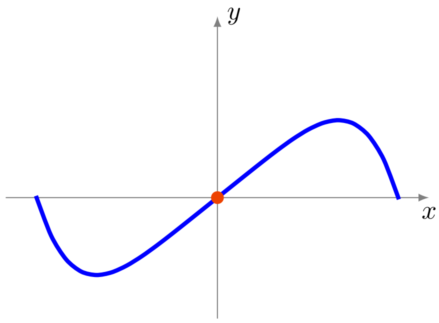


3.1.2 Parité et périodicité

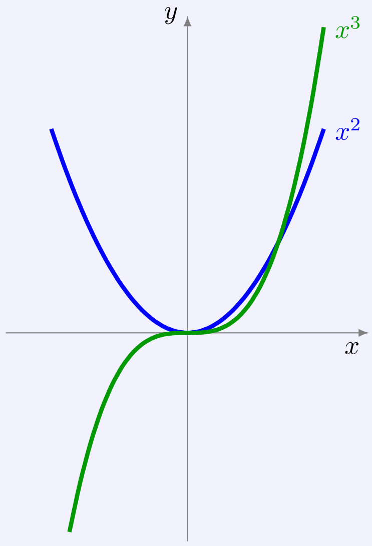
Définition *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle*
- f *est paire si et seulement si* $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f$ *et* $f(-x) = f(x)$
- f *est impaire si et seulement si* $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f$ *et* $f(-x) = -f(x)$

Remarque 3.2. – *le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,*
– *le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.*





Exemple
- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^2$ *est paire.*
- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^3$ *est impaire.*



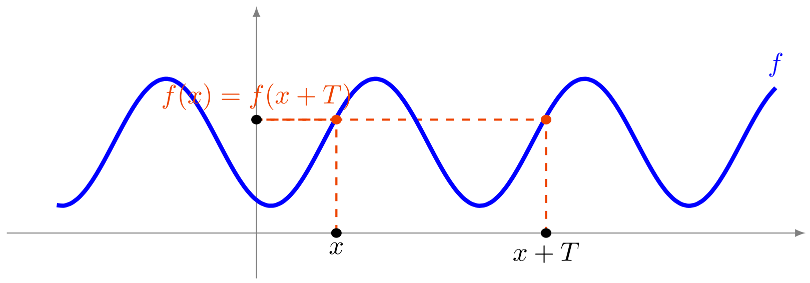
Définition *Soit* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction réelle d'une variable réelle, on dit que* f *est périodique de période* $T > 0$ *si et seulement si*

- *i)* $\forall x \in D_f \quad x + T \in D_f$
- *ii)* $\forall x \in D_f \qquad f(x+T) = f(x)$

T *est le plus petit réel strictement positif qui vérifie ii)*

Remarque 3.3. *Le graphe d'une fonction périodique de période* T *est invariant par la translation de vecteur* $T\vec{i}$

3.2 Opération sur les fonctions



3.2.1 Somme et produit de deux fonctions

Définition *Si f et g sont deux fonctions réelle d'une variable réelle, on appelle* **somme** *et* **produit** *de f et g les fonctions $s = f + g$ et $p = f \times g$ définies par : $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $p(x) = f(x) \times g(x)$.*

3.2.2 Produit d'une fonction par un nombre réel

Définition *Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, on appelle produit de la fonction f par un nombre réel α la fonction $g = \alpha.f$ définie par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = \alpha \times f(x)$.*

3.2.3 Composition de deux fonctions

Définition *Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies respectivement sur partie E de $\mathbb{R}$ et sur une partie F de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E$ on $f(x) \in F$. On définit sur E la fonction composée de f et g, que l'on note $g \circ f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

***Remarque* 3.4.** *: Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on compose car $g \circ f \neq f \circ g$. Pour s'en apercevoir on considère les fonctions f et g, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. On a pour tout nombre réel x : $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ et on a évidemment $g \circ f \neq f \circ g$.*

***Remarque* 3.5.** *: Il faut faire aussi attention aux domaines de définitions de fonction scomposées. Pour s'en convaincre considérer les fonctions $f = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ et donner le domaine de définition de leurs composées.*

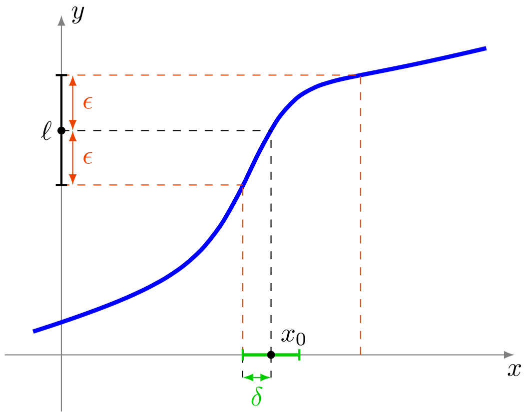
3.3 Limites

Limite en un point

Définition *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sauf, peut-être, en x_0. On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si :*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ (\forall x \in \mathcal{V} \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.



***Remarque* 3.6.** – *L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.*

– *On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ »par des inégalités larges « $\leq$ » dans la définition : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$*

– *Dans la définition de la limite*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

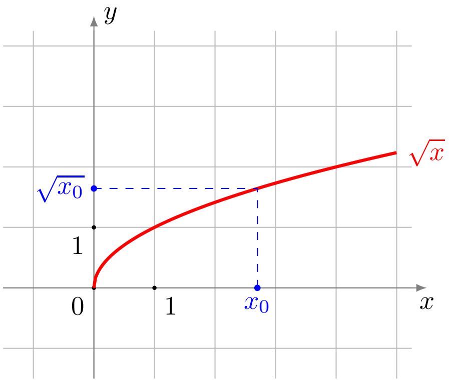
le quantificateur $\forall x \in \mathcal{V}$ n'est là que pour étre sur que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

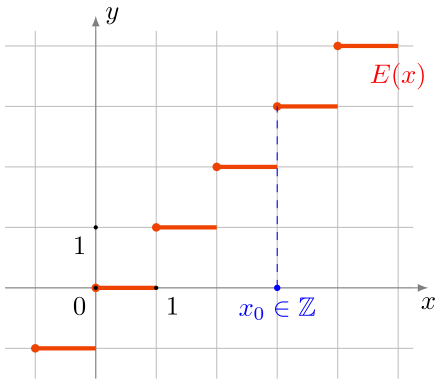
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Exemple

– $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x_0 \geq 0$,

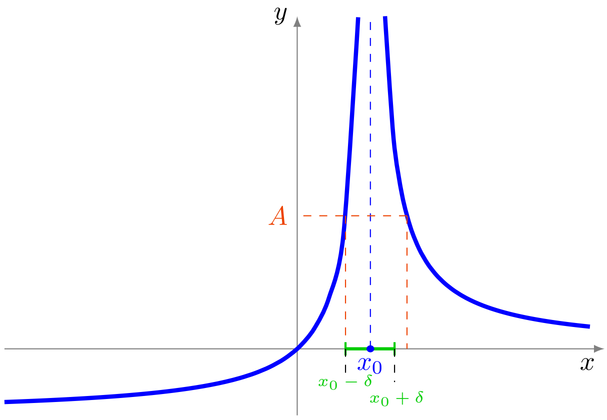
– *la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.*





Définition

1. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ au point x_0 si :*
$$\forall\ A > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ (x \in V\ \textit{et}\ 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) > A,$$
on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
2. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ au point x_0 si :*
$$\forall\ A > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ (x \in \mathcal{V}\ \textit{et}\ 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow f(x) < -A,$$
on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Limite à droite et à gauche en un point

Définition *Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$, $(a < b)$ sauf, peut-être, aux points a et b.*

1. *On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à droite en a si :*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ :\ (x \in I\ \textit{et}\ 0 < x - a < \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

2. *On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à gauche en b si :*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ :\ (x \in I\ \textit{et}\ 0 < b - x < \eta) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$.

***Exemple* 41.** *: Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x > 1 \\ x + 1 & si \quad x \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

***Remarque* 3.7.** *: Pour qu'une fonction possède une limite en un point il faut et il suffit qu'elle possède en ce point des limites à droite et à gauche qui sont égales.*

Limite en l'infini

Définition *Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.*

1. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B > 0\ : x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

2. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B > 0\ : x < -B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

3. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall\ A > 0, \exists\ B > 0\ : x > B \Longrightarrow f(x) > A,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ A>0, \exists\ B>0\ : x<-B \Longrightarrow f(x)>A,$$

on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

5. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

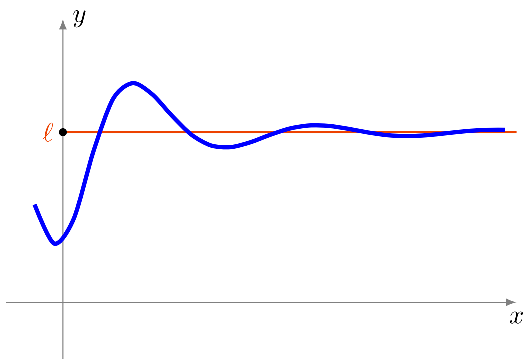
$$\forall\ A>0, \exists\ B>0\ : x>B \Longrightarrow f(x)<-A,$$

on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

6. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ A>0, \exists\ B>0\ : x<-B \Longrightarrow f(x)<-A,$$

on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



Propriété *Si f admet pour limite ℓ, (ℓ fini ou non), en x_0, (x_0 fini ou non), alors cette limite est unique.*

Preuve : *On adapte la même preuve de l'unicité de la limite d'une suite (un raisonnement par l'absurde)..*

3.4 Propriétés des limites et opération

Dans la proposition suivante, on établit les règles générales de calcul sur les limites. On énonce les propriétés pour un point x_0 de $\mathbb{R}$. Comme on le fait remarquer ci dessous les résultats restent vrais si l'on remplace x_0 par l'infini et les démonstration s'adaptent sans trop de difficultés.

Propriété *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf peut-être en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 et g admet pour limite $\ell' \in \mathbb{R}$ en x_0 alors les fonctions $f+g$, λf et fg ont une limite en x_0 et on a :*

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell \ell'$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell} \quad si \quad \ell \neq 0.$
- *Si dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.*

Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites. Nous n'allons donc pas donner la preuve de tous les résultats.

Démonstration. Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Supposons $\ell > 0$, le cas $\ell < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0 . Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'.$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = \mathcal{V} \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à -dire, en posant $M = \ell/2$:

$$\forall x \in J \quad 0 < \frac{1}{f(x)} < M.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - f(x)|}{f(x)\ell} < \frac{M}{\ell} |\ell - f(x)| .$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \frac{\ell \epsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{M}{\ell} |\ell - f(x)| < \frac{M}{\ell} \epsilon' = \epsilon.$$

■

Remarque 3.8. *: Les résultats relatifs aux opérations sur les limites en x_0 s'appliquent en particulier lorsqu'il s'agit de limites à droite en x_0, à gauche en x_0, quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.*

Les autres résultats sont donnés dans les tableaux suivants :
Au point x_0 ou à droite en x_0 ou à gauche en x_0 ou lorsque x tend vers $+\infty$ ou lorsque x tend vers $-\infty$. On a :

I

limite de f :	*limite de g :*	*limite de f + g :*
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*on ne peut conclure*

II

limite de $\|f\|$:	*limite de $\|g\|$:*	*limite de $\|fg\|$:*
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	*on ne peut conclure*
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

III

limite de $\|f\|$:	*limite de $\|g\|$:*	$\left\|\frac{f}{g}\right\|$ *a pour limite :*
$\ell \neq 0$	*0 (voir remarque* 1.3.2*)*	$+\infty$
0	*0*	*on ne peut conclure*
ℓ	$+\infty$	*0*
$+\infty$	ℓ *(voir remarque* 1.3.2*)*	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	*on ne peut conclure*

***Remarque* 3.9.** *: Dans le tableau III, ligne 1 et ligne 4 quand la limite de g est nulle, on suppose $g(x) \neq 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sauf peut-être en x_0, afin que $\dfrac{f}{g}$ soit définie sur $\mathcal{V}$ sauf peut-être en x_0.*

***Remarque* 3.10.** *: Les propriétés que nous venons d'énoncer ne permettent pas de calculer toutes les limites. Par exemple il n'y a pas d''énoncé pour le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction qui tend vers l'infini : Suivant les cas, le résultat peut d'ailleurs être 0 ou l'infini ou une limite finie ou nulle, ou bien il n'y a pas de limite ; on dit que $0 \times \infty$ est une forme indéterminée. Les autres formes indéterminés qu'on peut rencontrer sont :*

$$+\infty - \infty, \quad 0.\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Pour voir si de telles formes ont des limites et éventuellement calculer ces limites, il suffit parfois de transformer convenablement l'expression pour que les théorèmes précédents puissent s'appliquer : c'est le cas par exemple pour les fractions rationnelles. Nous verrons plus tard les méthodes qui permettent de franchir l'obstacle des formes indéterminées ; en particulier, la règle de de l'Hospital, les fonctions équivalentes et la technique plus sûre des développements limités.

***Exercice* 1.** *Calculer lorsqu'elles existent, les limites suivantes :*

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x) + 2|x|\sin x}{x},$$

$$b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|\cos x}{x}.$$

---

corrigé

a) Puisque $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ *on a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x) + 2|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \tan x + 2\lim_{x\to 0} |x| \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

b) Puisque $x + 2\frac{|x|}{x}\cos x \leq x - 2$ *qui a limite* $-\infty$ *lorsque* $x \to -\infty$,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|\cos x}{x} = -\infty.$$

3.5 Fonctions continues

3.5.1 continuité en un point.

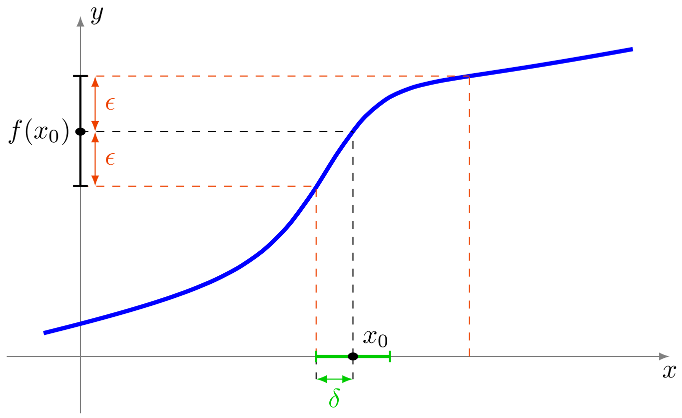
Définition *Soit f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

c-à-d

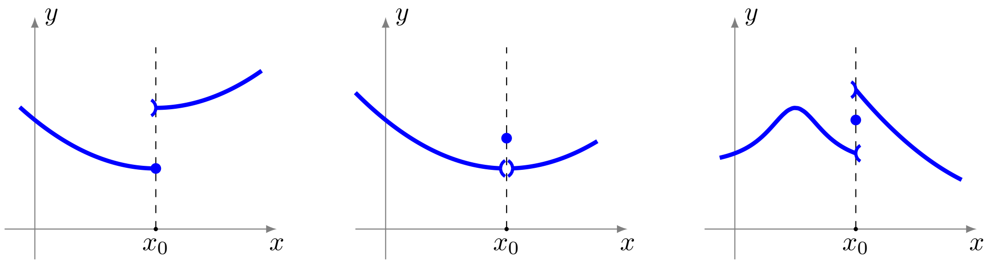
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

***Exemple* 42.** *La fonction $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe ¡¡ sans lever le crayon ¿¿, c'est-à -dire si elle n'a pas de saut.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Définition *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, ($a < b$).*
- *On dit que f est continue à droite en a si : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue à gauche en b si : $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

***Exemple* 43.** *La fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \geq 1 \\ 2x & si \quad x < 1, \end{cases}$$

est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1

***Remarque* 3.11.** *Pour qu'une fonction f soit continue en un point il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en ce point.*

***Remarque* 3.12.** *Une fonction non continue en un point est dite discontinue en ce point. Il faut noter que, pour attribuer le qualificatif de discontinue au point a, il faut d'abord s'assurer qu'elle est bien définie en a, de plus, il faut s'assurer, que quand $x \in I - a$ tend vers a, ou bien que $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas ou bien que cette limite existe mais ne vaut pas $f(a)$.*

3.5.2 Prolongement par continuité.

Soit f une fonction définie sur D_f. Si $x_0 \notin D_f$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \in D_f \\ g(x_0) = l. \end{cases}$$

La fonction g est continue en x_0 et coïncide avec f sur D_f. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

***Exemple* 44.** *Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}.$$

En remarquant que $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$, on peut écrire pour $x \neq 1$, $f(x) = 2x+1$. Donc $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.
La fonction $g : x \longmapsto 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 1$ et coïncide avec f sur D_f. Donc g est le prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$.

***Exemple* 45.** *La fonction $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Comme $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0, posons*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

g est le prolongement par continuité de f en 0.

***Remarque* 3.13.** *Si $g(0) \neq 0$, g est un prolongement non continu. La proposition sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un inverse de fonctions permet d'énoncer*

Propriété *Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues en x_0.*
Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

Propriété *Si f est définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et continue en x_0 et si g est définie sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.5.3 Suites et continuité

Propriété *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :*

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{c} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ *On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$ et donc $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.
$\Longleftarrow$ *On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.*
Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in I \quad \text{tel que} \quad |x_\delta - x_0| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la facon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

■

3.6 Fonctions continues sur un intervalle

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est appelée intervalle si pour tous x et y dans I, l'intervalle $[x, y]$, $(x < y)$, est inclus dans I.

Définition *Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I, si elle est continue en tout point de I.*

Propriété *Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit c sa borne supérieure. Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers c.*

Démonstration. Comme c est la borne supérieure de X, il est le plus petit des majorants de X :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, x \in X \mid c - \varepsilon < x \leqslant c.$$

En particulier,

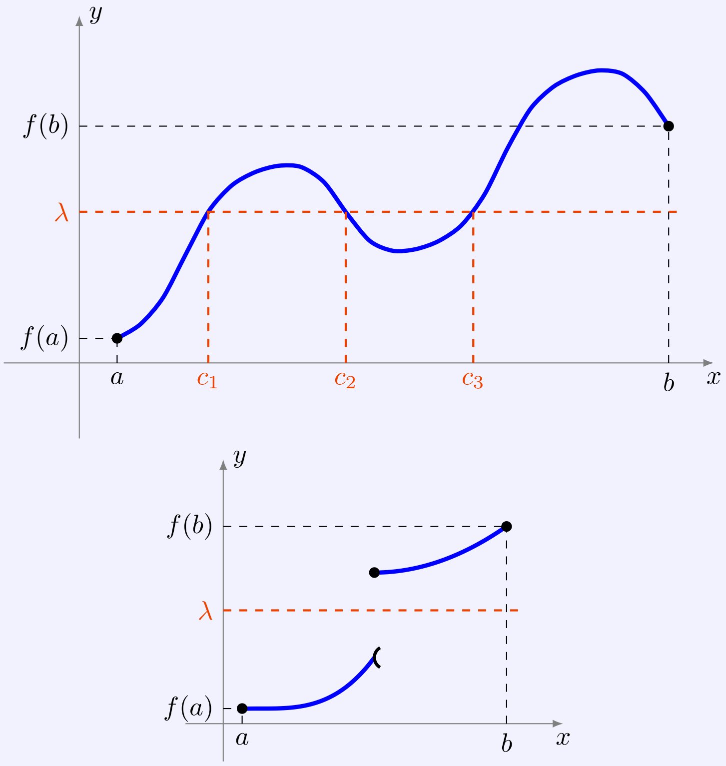
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, x_n \in X \mid c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c.$$

On en déduit (théorème des gendarmes) que la suite (x_n) converge vers c. □ La preuve dans le cas de la borne inférieure est analogue.

■

Remarque 3.14. *si $c = +\infty$ alors aucun entier n'est un majorant de X. Soit, pour tout entier naturel $n, x_n \in X$ tel que $x_n > n$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

Théorème *(**Théorème des valeurs intermédiaires T.V.I.**) : Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*



Démonstration. Si $f(a) = f(b)$, alors on a nécessairement $\lambda = f(a) = f(b)$, et il suffit de choisir par exemple $c = a$ pour conclure. On peut donc supposer dans la suite que $f(a) < f(b)$ (quitte à choisir $g = -f$ si jamais $f(a) > f(b)$). Notons

$$X = \{x \in \ [a, b] \mid f(x) \leqslant \lambda\}.$$

Cet ensemble X est *non vide* : en effet, d'après notre petite hypothèse, $f(a) \leqslant \lambda$, donc $a \in \ X$.
Cet ensemble X est *majoré par* b : c'est clair, puisque X est inclus dans $[a, b]$.
Cet ensemble X admet donc une borne supérieure $c \in \ [a, b]$.

Montrons que $\boldsymbol{f(c) \leqslant \lambda}$: Comme $c = \sup X$, il existe une suite x_n d'éléments de X qui converge vers c. Mais puisque les x_n sont dans X, ils vérifient l'inégalité $f(x_n) \leqslant \lambda$. Et enfin, puisque f est continue en c, le passage à la limite dans cette inégalité donne le résultat recherché : $f(c) \leqslant \lambda$.

Montrons que $\boldsymbol{f(c) \geqslant \lambda}$: Notons déjà que si $c = b$, alors $f(c) = f(b) \geqslant \lambda$, et la démonstration s'achève. Supposons alors que $c < b$. Puisque $c = \sup X$, on a

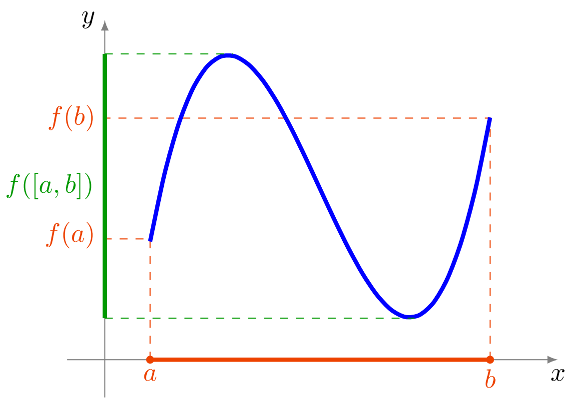
$$\forall\, x \in \,]c, b], x \notin X \text{ (c'est-à-dire } f(x) > \lambda).$$

Soit alors (y_n) une suite d'éléments de $]c, b]$ qui converge vers c (existe d'après le lemme 1 qu'on peut très facilement adapter à la borne inférieure). On a donc $f(y_n) > \lambda$. Comme précédemment, la continuité de f au point c nous permet de passer cette inégalité à la limite afin d'obtenir $f(c) \geqslant \lambda$.

Conclusion : On arrive donc à $f(c) = \lambda$, ce qui achève cette démonstration.

■

Corollaire *: Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*



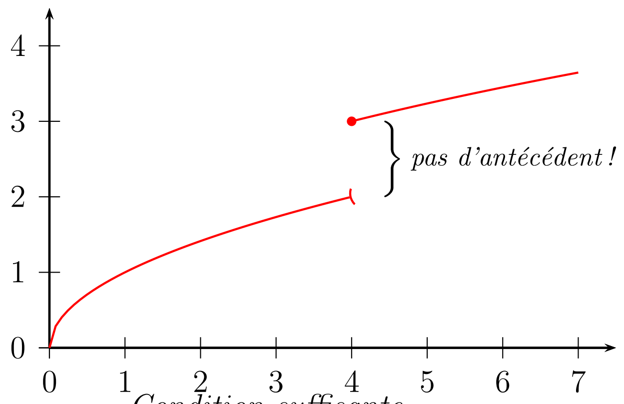
Démonstration. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que $y_1 \leqslant y_2$. Il s'agit de montrer que tout élément λ de $[y_1, y_2]$ est élément de $f(I)$ (par définition d'un intervalle). Comme $y_1, y_2 \in f(I)$, il existe a et b tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$. Puisque I est un intervalle, on a $[a, b] \subset I$. Il s'en suit que f continue sur $[a, b]$ (en effet, $[a, b] \subset I$ et f est continue par hypothèse sur I) implique que

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2], \quad \exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = \lambda,$$

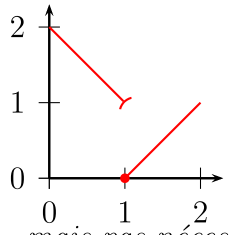
en utilisant le T.V.I. On en déduit directement que $\lambda \in f(I)$, d'où le résultat.

■

1. *L'hypothèse f est une fonction continue est suffisante, mais pas nécessaire :*



Condition suffisante...



...mais pas nécessaire !

Dans le premier cas, la fonction f définie sur $[0,7]$ n'est pas continue, et on voit clairement que $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Dans le second cas, la fonction g est définie par :

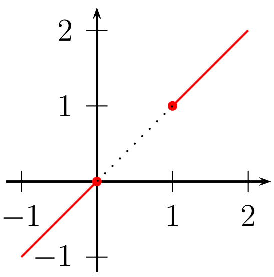
$$\begin{array}{rcl} g \ : \ [0,2] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2-x & si\ x<1 \\ x-1 & si\ 1\leqslant x \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas continue mais $f([0,2]) = [0,2]$ est bien un intervalle.

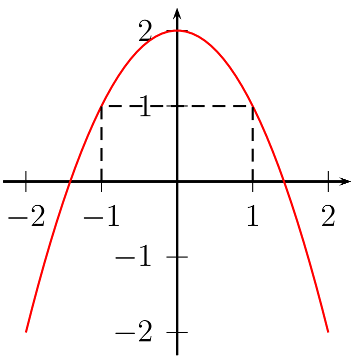
2. *Ce théorème ne fonctionne pas non plus si I n'est pas un intervalle. En effet, la fonction f définie sur $[-1,0]\cup[1,2]$ par $f(x) = x$ est bien continue, mais $f(I) = [-1,0]\cup[1,2]$ n'est pas un intervalle.*

3. *Le T.V.I. donne un antécédent de λ, mais il n'est pas fornément unique. En effet, si f est la fonction définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = 2 - x^2$, alors on sait que 1 a deux antécédents : -1 et 1.*

Voici les graphiques correspondant aux exemple des points 2 et 3 :

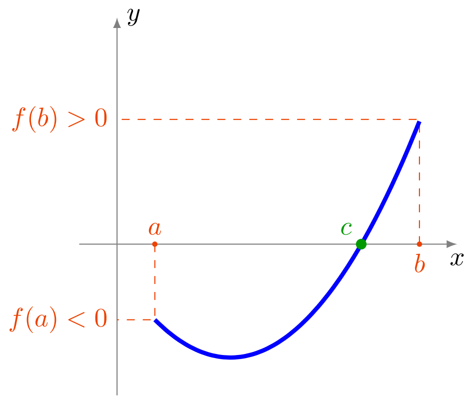


I doit être un intervalle !



Deux antécédents

Propriété *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Si $f(a).f(b) < 0$ alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*



Démonstration *D'après le corollaire $f(I)$ est un intervalle. Si de plus $f(a).f(b) < 0$ alors $0 \in f(I)$ par suite il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.*

***Exemple* 46.** *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

***Remarque* 3.15.**

1. *On peut exprimer le théorème des valeurs intermédiaires sous la forme plus condensée suivante : l'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.*
2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On peut se demander si le type de I (c'eat à dire : I est fermé, borné, semi-ouvert$\cdots$)est conservé par f, c'est à dire si $f(I)$ est du même type que I. Nous verrons plus loin que que lorsque I est un segment alors $f(I)$ l'est aussi. Mais les autres types d'intervalles ne sont en général pas conservé. Par exemple il est facile de vérifier que la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est définie sur $I = \mathbb{R}$ et que $f(I) =]-1, 1[$. (Tracer le graphe de la fonction f.) Dans cet exemple I n'est pas borné et $f(I)$ est borné. Un autre exemple est celui de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq -1 \\ x & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Il est facile aussi de voir que $f(I) = [-1, 1]$. Dans cet exemple I est un ouvert et $f(I)$ n'est pas ouvert.

Théorème du point fixe *Si f est une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le point x_0 est appelé point fixe de f.*

Démonstration *Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$, de plus $g(a) \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et $g(b) \leq 0$ car $f(b) \in [a, b]$. La fonction g étant continue sur $[a, b]$ et vérifie $g(a)g(b) \leq 0$, il résulte de la conséquence* (2.3.2) *qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, donc $f(x_0) = x_0$.*

Théorème *Toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'ils existent x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que*

$$m = f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \;\; M = f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \textit{et } f([a, b]) = [m, M].$$

Démonstration. **Montrons d'abord que f est bornée** : Supposons le contraire. Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, u_n \in [a, b] \mid f(u_n) \geqslant n.$$

Mais on peut extraire (grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass) une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers un réel $\lambda \in [a, b]$. Puisque f est continue, on a $\lim f(u_{\phi(n)}) = f(\lambda)$, ce qui est une contradiction : en effet, puisque ϕ est par définition strictement croissante, on a que

$$f(u_{\phi(n)}) \geqslant \phi(n) \geqslant n,$$

qui tend, lui, vers $+\infty$.

Montrons ensuite que f atteint ses bornes : Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors, d'après la propriété précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, x_n \in [a, b] \mid \lim_{n\to\infty} x_n = M.$$

Cependant, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un réel $x_1 \in [a, b]$ (car $[a, b]$ est fermé). donc, la limite de $f(x_{\phi(n)})$ est $f(x_1)$. On en déduit que $f(x_1) = M$.
Un raisonnement analogue permet de montrer que la borne inférieure est aussi atteinte.

■

3.7 Fonctions réciproques

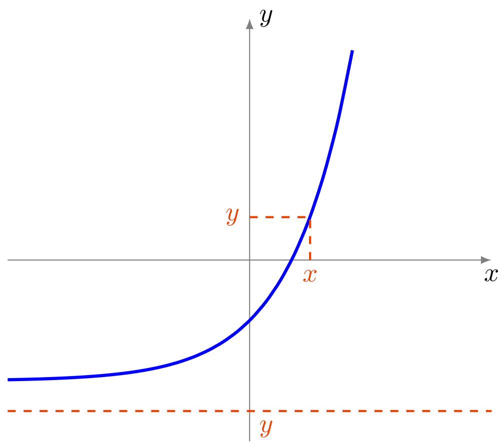
3.7.1 Rappels : injection, surjection, bijection

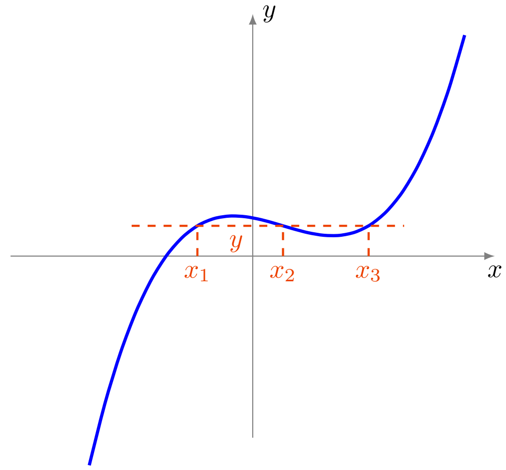
Définition *Soit $f : E \to F$ une fonction, avec E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*
- *f est injective si $\forall x, x' \in E \;\; f(x) = f(x') \implies x = x'$;*

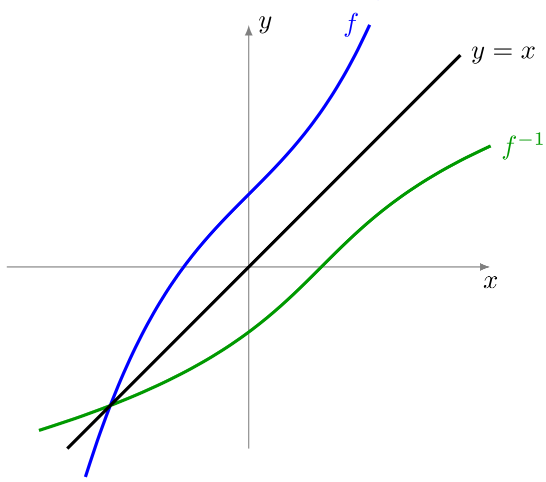
- f *est surjective si* $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;
- f *est bijective si* f *est à la fois injective et surjective,*
  c'est-à -dire si $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$.

Propriété *Si* $f : E \to F$ *est une fonction bijective alors il existe une unique application* $g : F \to E$ *telle que* $g \circ f = id_E$ *et* $f \circ g = id_F$ *La fonction* g *est la bijection réciproque de* f *et se note* f^{-1}.

***Remarque* 3.16.** *Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions* f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*







Définition *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

1. f *est dite croissante sur* I *si* $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

2. *f est dite décroissante sur I si $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*

***Remarque* 3.17.** *Si $x_0,\ x_1\ \in I$ avec $x_0 \neq x_1$, on pose*

$$T_f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

appelé le taux d'accroissement de f entre x_0 et x_1. Il est aisé de vérifier que f est croissante sur I si $T_f(x_1, x_0) \geq 0$, pour tout $x_0,\ x_1 \in I$, et qu'elle est décroissante sur I si $T_f(x_1, x_0) \leq 0$, pour tout $x_0,\ x_1 \in I$.

***Remarque* 3.18.** *Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.*

***Remarque* 3.19.** *: Si on remplace, dans cette définition, les inégalités larges par les inégalitée strictes, on dira que f est strictement croissante ou strictement décroissante. De même on dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

***Remarque* 3.20.** *Si on désigne par D la droite passant par les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_1(x_1, f(x_1))$ alors le rapport $T_f(x_1, x_0)$ est égale au coefficient directeur (ou encore pente) de la droite D. Rappelons la proposition suivante concernant la composée de deux fonctions monotones : la fonction f définie sur E partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F une partie de $\mathbb{R}$, et la fonction g définie sur F et à valeurs dans G une autre partie de $\mathbb{R}$*

Propriété *La composée de deux fonctions monotones est une fonctions monotone. Plus précisement la composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est une fonction croissante; la composée de deux fonctions ayant un sens de variation différent est une fonction décroissante.*

Démonstration *Soient x_1 et x_2 deux éléments quelconques de E tels que $x_1 < x_2$.*
premier cas : les deux fonctions f et g sont croissantes. Comme f est croissante sur E on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ et puisque g est croissante sur F on en déduit que $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ soit encore $(g \circ f)(x_1) \leq g \circ f)(x_2)$. On en déduit que la fonction $(g \circ f)$ est croissante sur E.
deuxième cas : f est croissante sur E et g est décroissantes sur F. Comme f est croissante sur E on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ et puisque g est décroissante sur F on en déduit que $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, soit encore $(g \circ f)(x_1) \geq g \circ f)(x_2)$. On en déduit que la fonction $(g \circ f)$ est décroissante sur E. Pour terminer la preuve il reste à étudier le cas où les deux fonctions sont décroissantes et le cas où f est décroissante et g est croissante. Ce mini travail est laissé aux étudiants.

3.8 Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.*

Démonstration. montrons que f est injective : soient $x \neq y$, alors par exemple $x < y$ et si f est croissante, alors $f(x) < f(y)$ d'où d'où $f(x) \neq f(y)$ donc f injective. ∎

Théorème de la bijection *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

Démonstration.

1. D'aprés le théorème précédent, f est injective sur I. soit $J = f(I)$, Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle donc f est surjective. on obtient que f établit une bijection de I dans J.
2. Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.
   a) Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc

   $$\begin{aligned} y < y' &\Longrightarrow f(x) < f(x') \\ &\Longrightarrow x < x' \qquad \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J.

   b) Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même maniére. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

   $$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

   c'est-à -dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

   $$y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon.$$

Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0-\epsilon) < f(x) < f(x_0+\epsilon) &\Longrightarrow x_0-\epsilon < x < x_0+\epsilon \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y_0)-\epsilon < x < f^{-1}(y_0)+\epsilon. \end{aligned}$$

Comme $f(x_0-\epsilon) < y_0 < f(x_0+\epsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0-\epsilon) < y_0-\delta \quad \text{et} \quad f(x_0+\epsilon) > y_0+\delta$$

et on a bien alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} y_0-\delta < f(x) < y_0+\delta &\Longrightarrow f(x_0-\epsilon) < f(x) < f(x_0+\epsilon) \\ &\Longrightarrow f^{-1}(y_0)-\epsilon < x < f^{-1}(y_0)+\epsilon. \end{aligned}$$

La fonction f^{-1} est donc continue sur J.

■

Remarque 3.21. *Si f est une fonction continue et bijective sur un intervalle I alors : Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

3.8.1 Exemples des foctions réciproques

Fonctions trigonométriques

$f : \begin{array}{ccc} \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ *est continue et strictement croissante, donc* $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$ *est continue et strictement croissante.*

$f : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ *est continue et strictement décroissante, donc* $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0;\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$ *est continue et strictement décroissante.*

$f : \begin{array}{ccc}]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ *est continue et strictement croissante, donc* $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$ *est continue et strictement croissante.*

Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Définition *: on appelle cosinus hyperbolique (resp. sinus hyperbolique, tangente hyperbolique) la fonction notée ch (resp. sh, th) définie sur $\mathbb{R}$ par : $chx = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$*

(resp. $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$*,* $thx = \dfrac{shx}{chx}$*).*

$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & chx \end{array}$ *est continue et strictement croissante, donc* $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & Argchx \end{array}$ *est continue et strictement croissante.*

$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & shx \end{array}$ *est continue et strictement croissante, donc* $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Argshx \end{array}$ *est continue et strictement croissante.*

$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ & x & \longmapsto & thx \end{array}$ *est continue et strictement croissante, donc* $\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Argthx \end{array}$ *est continue et strictement croissante.*

4

Dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

4.1 Dérivée d'une fonction

Définition *Soit f une fonction définie sur un voisinage I de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le nombre réel (unique) α est appelé dérivée de f en x_0 et noté $f'(x_0)$.
Si f est dérivable en tout point de I on dit qu'elle est dérivable sur I.

***Exemple* 47.** *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$. En effet ; soit $x_0 \in I$, si $x \neq x_0$, on a :*

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \quad et \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

***Exemple* 48.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, en effet ; soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour $x \neq x_0$, on a :*

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = (x^{n-1} + \cdots + x^{n-m-1} x_0^m + \cdots + x_0^{n-1}),$$

donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + \cdots + x^{n-m-1}x_0^m + \cdots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

***Remarque* 4.1.**

1. *Si on pose* $h = x - x_0$ *alors la dérivabilité de* f *en* x_0 *équivaut à*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2. *Pour* $x \neq x_0$*, posons*

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Alors la dérivabilité de f *en* x_0 *équivaut à*

$$(\star) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Si on pose $x - x_0 = h$ *et* $\varepsilon_1(h) = \varepsilon(x_0 + h)$*, la relation* $(\star)$ *s'écrit*

$$(\star\star) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\varepsilon_1(h), \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0,$$

Donc si $f'(x_0) \neq 0$*, le nombre* $f'(x_0)h$ *est une valeur approchée de* $f(x_0 + h) - f(x_0)$ *et on peut écrire* $f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)h$ *pour* h *« assez petit ».*

4.1.1 Interprétation géométrique

Soient $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \neq 0$, *deux points de* C_f *et* D *la droite passant par* M_0 *et* M*, voir* $Fig.1$.

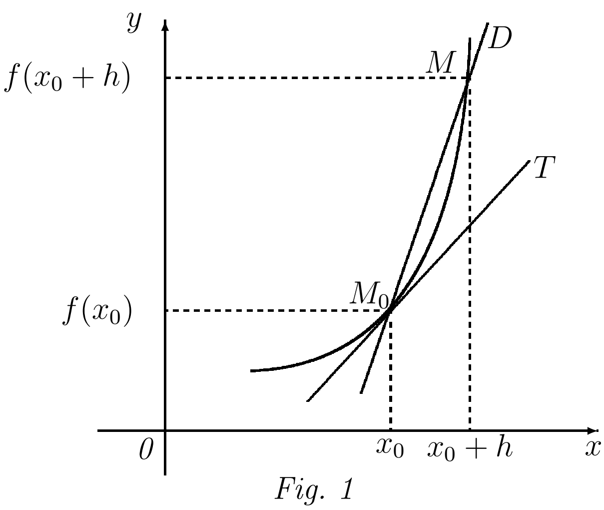


Fig. 1

Désignons par $y = ax + b$ *l'équation de la droite* D*. Comme* $M \in D$ *et* $M_0 \in D$ *on a :* $f(x_0) = ax_0 + b$ *et* $f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b$*. En faisant la différence on obtient :*

$$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Fixons x_0 *et faisant varier* h*, on notera alors* a *par* $a(h)$*. Ainsi* $y = a(h)x + b$ *et* $b = f(x_0) - a(h)x_0$ *donc :* $y = a(h)(x - x_0) + f(x_0)$*. En outre, si* h *tend vers* 0*, alors* M *tend vers* M_0 *et la droite* D *tend vers une position limite* T *; qui est par définition la tangente en* M_0 *à* C_f*, voir* $Fig.1$*. Pour trouver l'équation de la tangente* T *il suffit de calculer* $\lim_{h \to 0} a(h)$*.Or*

$$\lim_{h \to 0} a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

On obtient alors, l'équation de la tangente T *:*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Propriété *Si* f *est dérivable en* x_0*, alors* f *est continue en* x_0*.*

Démonstration *D'après la relation* $(\star)$*, on a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *ce qui prouve que* f *est continue en* x_0*.*

***Remarque* 4.2.** *La réciproque est fausse.*

***Exemple* 49.** $f(x) = \mid x \mid$ *sur* $]-1, 1[$ f *est continue en* 0*, mais n'est pas dérivable au point* 0*.*

Définition *Soit* f *une fonction définie sur un voisinage d'un point* x_0*.*

- *On dit que* f *est dérivable à droite en* x_0 *si :*

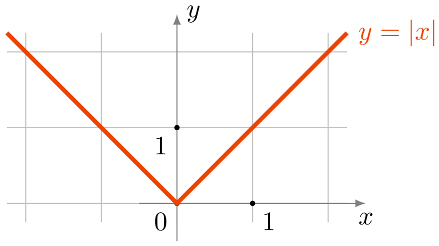
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}.$$

- *On dit que* f *est dérivable à gauche en* x_0 *si :*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' \in \mathbb{R}.$$

Les nombres l *et* l' *notés respectivement* $f'_d(x_0)$ *et* $f'_g(x_0)$ *sont appelés dérivée à droite et à gauche de* f *en* x_0*.*

***Exemple* 50.** *La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x \neq 0$, le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ est égal à 1 si $x > 0$ et à -1 si $x < 0$ donc $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.*



Propriété *Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

***Remarque* 4.3.** *: Soit f une fonction dérivable sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$. Considérons l'application notée f' définie de $\mathcal{V}$ vers $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{array}{rcl} f' \ :\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x), \end{array}$$

cette nouvelle fonction s'appelle la **fonction dérivée** *de f. On notera bien la distinction entre la dérivée de f en x_0 qui est un nombre, et la fonction dérivée.*

4.1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

La proposition sur la limite d'une somme, d'un produit puis d'un quotient de fonctons permet d'énoncer :

Propriété *Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0. Alors :*
1. $f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

3. fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) \quad = \quad f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

4.

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x)}{g(x_0)^2}$ *(si* $g(x_0) \neq 0$*),*

5. Si $g(x_0) \neq 0$*, alors* $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \quad = \quad \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Démonstration. 1. $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$
2. trivial
3. soit $x_0 \in I$. $\forall x \in I - \{x_0\}$, $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}$
$= \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} f(x_0)$
On conclut comme g continue en x_0, et f, g dérivable sur x_0 :
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
4. soit $x_0 \in I$ où g ne s'annule pas sur I. $\forall x \in I - \{x_0\}$,
$(\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}).\dfrac{1}{x-x_0} = (-\dfrac{1}{g(x)g(x_0)}.\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$,
or g continue sur I et g dérivable sur I, donc
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = -\dfrac{1}{g(x_0)^2}.g'(x_0)$
5. on utilise 3. et 4. on déduit que $(\dfrac{f}{g})' = (f.\dfrac{1}{g})' = f'.\dfrac{1}{g} + f.\dfrac{-g'}{g^2} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ ∎

4.1.3 Dérivée d'une fonction composée

Propriété *Soient* f *une fonction définie sur un voisinage* I *d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* g *une fonction définie sur un voisinage* J *de* $f(x_0)$*. Si* f *est dérivable au point* x_0 *et* g *dérivable au point* $f(x_0)$*. Alors la fonction composée* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration.

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big)\times f'(x_0).$$

■

4.1.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Soit g la fonction réciproque, définie dans un intervalle J.

Théorème 4.1. *Si f est dérivable en x_0, et si $f'(x_0)\neq 0$,alors g est dérivable au point $y_0=f(x_0)$ et l'on a :*

$$g'(y_0)=(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration *Soit $y\neq y_0$ un point de J. Soit $x=g(y)$ qui est distinct de x_0 et appartient à I. On a :*

$$\frac{g(y)-g(y_0}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}.$$

Quand y tend vers y_0 par valeurs différentes de y_0, $x=g(y)$ tend vers $x_0=g(y_0)$ parce que g est continue en y_0. Alors $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0)$. D'où la proposition.

***Remarque* 4.4.** *: Supposons $f'(x_0)=0$. Si par exemple f est croissante, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers 0 par valeurs supérieures, donc $\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ tend vers $+\infty$. Donc $g'(y_0)=+\infty$, et l'on peut considérer que la formule $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ est encore valable. De même si f est décroissante.*

***Exemple* 51.** *Soit $f(x)=Ln(x)$: on a $f^{-1}(x)=e^x$ et*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\frac{1}{x_0}}=x_0=e^{y_0}$$

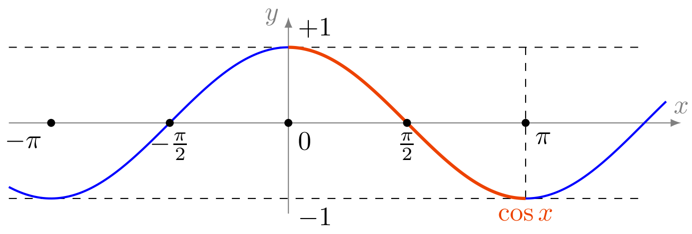
Arccosinus

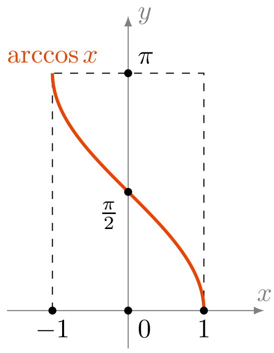
soit

$$\cos_| : [0,\pi]\to[-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : [-1,1]\to[0,\pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\begin{aligned} \cos\big(\arccos(x)\big) &= x \quad \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) &= x \quad \forall x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Autrement dit : Si $\quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$

Terminons avec la dérivée de arccos *:*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Démonstration. On a $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} & \cos(\arccos x) = x \\ \Longrightarrow\ & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\ \Longrightarrow\ & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

or $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe $+$ car $\arccos x \in [0,\pi]$).

■

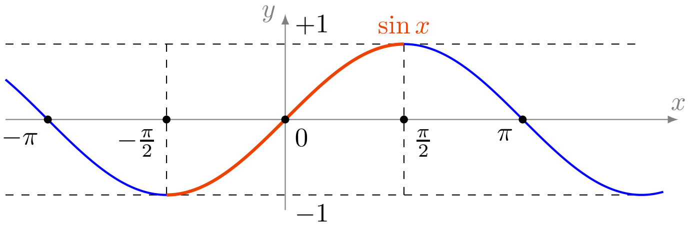
Arcsinus

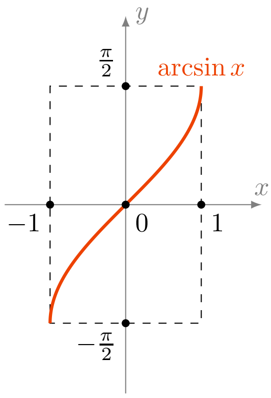
soit

$$\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$





$$\begin{aligned} \sin\big(\arcsin(x)\big) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) &= x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$Si \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

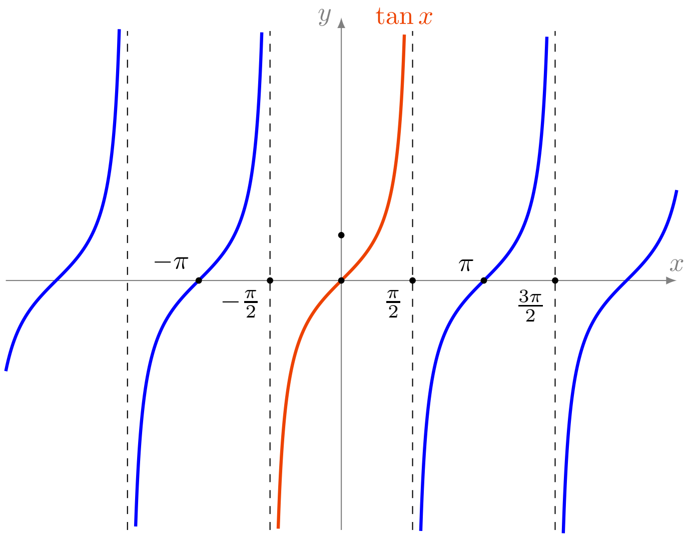
Arctangente

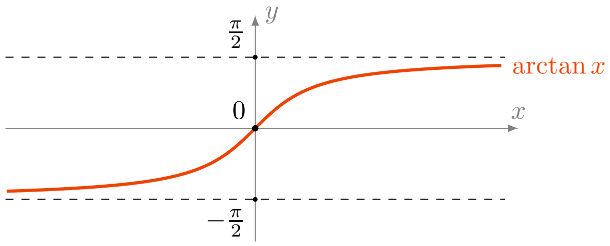
La restriction

$$\tan_| :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$





$$\begin{aligned} \tan\big(\arctan(x)\big) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) &= x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

$$Si \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4.2 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la fonction dérivée $f' : x \longmapsto f'(x)$ est elle-même dérivable sur I, elle admet une fonction dérivée définie sur I qui s'appelle la **fonction dérivée seconde** *de f (ou la* **fonction dérivée d'ordre 2** *de f et qu'on note f'' ou $f^{(2)}$). On dit que f est dérivable deux fois sur I. D'une manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable n fois sur I, on définit la dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$ par : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ et $f^{(0)} = f$.*

4.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^p$

Définition *Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable et si la fonction f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit a un élément de I. Puisque la fonction f' est continue, la proposition (voir chapitre primitive) affirme que l'on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \quad \text{quel que soit} \quad x \in I.$$

Cette égalité exprime les valeurs de $f(x)$ au moyen de a et d'une intégrale de la fonction dérivée f'.

Définition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle ouvert et soit p un entier supérieur ou égal à 1. Si les dérivées $f', f", \cdots, f^{(p)}$ existent et si $f^{(p)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.*

***Remarque* 4.5.** *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors f est évidemment de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p et toutes les dérivées $f^{(n)}$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

***Exemple* 52.** *: Pour tout nombre réel a, la fonction $x \mapsto x^a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, \infty[$.*

***Exemple* 53.** *:La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

***Exemple* 54.** *Les fonctions sinus et cosinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. et l'on a :*

$$sin^{(p)}(x) = sin(x + p\frac{\pi}{2}) \quad et \quad cos^{(p)}(x) = cos(x + p\frac{\pi}{2}).$$

Le calcul des premières dérivées d'une fonction ne réclame que de l'attention et du temps. Mais sauf pour quelques fonctions usuelles, il n'est pas possible en général de trouver une formule explicite pour la dérivée $p-$ième. Voici des moyens d'affirmer q'une fonction est de classe $\mathcal{C}^p$:

Propriété *: Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, il en va de même de la somme $f + g$, du produit fg et (s'il existe) de la composée $f \circ g$.*

Démonstration *L'affirmation pour la somme est évidente. Pour le produit, le résultat s'obtient en écrivant la formule de Leibniz (voir ci après) qui exprime la dérivée p-ème de la fonction produit fg au moyen des dérivées successives de f et de g. Pour la composée, on raisonne par récurrence.*

Formule de Leibniz. *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en x_0, alors :*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p f^{(n-p)}(x_0) g^{(p)}(x_0).$$

Démonstration *Ce résultat se démontre par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 1$: en appliquant la règle de dérivation d'un produit, on a bien $(fg)' = f'g + fg'$. Supposons la relation vraie pour $(fg)^{(n-1)}$, soit*

$$(fg)^{(n-1)} = f^{(n-1)}g + \mathcal{C}_{n-1}^1 f^{(n-2)}g' + \cdots + \mathcal{C}_{n-1}^{p-1} f^{(n-p)}g^{(p-1)} + \cdots + \mathcal{C}_{n-1}^{n-1} fg^{(n-1)},$$

et montrons qu'elle est vraie pour $fg)^{(n)}$. En dérivant la relation précédente, on obtient

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + (\mathcal{C}_{n-1}^1 + 1)f^{(n-1)}g' + \cdots + (\mathcal{C}_{n-1}^p + \mathcal{C}_{n-1}^{p-1})f^{(n-p)}g^{(p)} + \cdots$$

$$+(\mathcal{C}_{n-1}^{n-1} + \mathcal{C}_{n-1}^{n-2})f'g^{(n-1)} + \mathcal{C}_{n-1}^{n-1} fg^{(n)}.$$

La formule de Leibniz s'en déduit en remarquant que $\mathcal{C}_{n-1}^{n-1} + \mathcal{C}_{n-1}^{n-2} = \mathcal{C}_n^p$.

***Exemple* 55.** *Calculons la dérivée d'ordre n de la fonction : $h(x) = xe^x$.*
Posons : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. On a : $f^{(p)}(x) = e^x$ pour tout p , $g'(x) = 1$ et $g^{(p)}(x) = 0$ pour $p > 1$. Donc :

$$h^{(n)}(x) = (fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + \mathcal{C}_n^1 f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) = (x+n)e^x.$$

4.4 Extremums

Définition *Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$. On dit que f possède un maximum (resp. un minimum) local (ou relatif) en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage, $\mathcal{V}(x_0) \subset I$, de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$, (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$.*

***Remarque* 4.6.** *Un maximum ou un minimum est appelé extremum.*

Propriété *Soit f une fonction dérivable sur $I =]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration *Pour simplifier supposons qu'il s'agit d'un maximum (la démonstration est la même si c'est un minimum). Soit $\mathcal{V}(x_0) \subset I$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$. Si $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, par passage à la limite, on a : $f'_g(x_0) \leq 0$. Si $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, par passage à la limite, on a : $f'_d(x_0) \geq 0$. Comme f est dérivable en x_0 on a : $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0) = 0$.*

***Remarque* 4.7.** *La réciproque de cette dernière proposition n'est pas toujours vraie. En effet; c'est l'exemple de la fonction $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais n'admet pas d'extremum en 0.*

***Remarque* 4.8.** *Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum en x_0.*

***Remarque* 4.9.** *Si f est définie sur $[a, b]$, alors les extrémums sont à chercher parmi :*

1. *Les bornes a et b.*
2. *Les points où la fonction n'est pas dérivable.*
3. *Les points où $f' = 0$.*

***Exemple* 56.** *$f(x) = x^3$ sur $[-1, 1]$, le maximum vaut 1 et le minimum est égal à -1.*

***Exemple* 57.** *: $f(x) =\mid x \mid$ sur $[-1, 1]$, le maximum c'est 1 et 0 est le minimum; f n'est pas dérivable en 0. Nous employons en général deux méthodes pour déterminer les extrémums d'une fonction, dont nous allons rappeler les grands lignes dans les sous sections suivantes.*

4.4.1 Méthode de la dérivée seconde

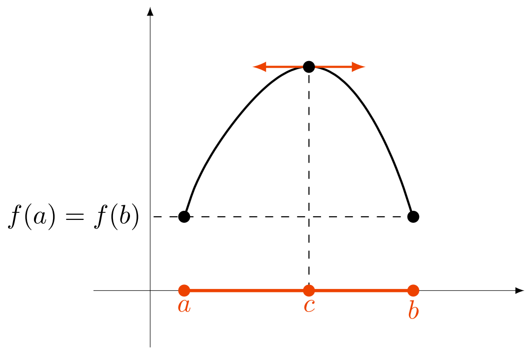
1. *Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.*
2. *Pour une valeur critique* $f'(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un maximum si} f"(a) < 0. \\ f \text{admet un minimum si} f"(a) > 0. \end{array} \right.$

***Remarque* 4.10.** *La méthode ne marche plus si $f"(x) = 0$ ou devient infinie.*

***Exemple* 58.** *Déterminer les extrémums de $f(x) = x(1 - x)^2$ sur $[-1, \frac{3}{2}]$.
On a : $f'(x) = (1 - x)(1 - 3x)$, et $f"(x) = -4 + 6x$. Donc $f'(x)$ s'annule aux points $x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$. $f"(1) > 0$,1 est un minimum. $f"(\frac{1}{3}) < 0$, $\frac{1}{3}$ est un maximum.*

Théorème de Rolle *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*
- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a,b]$ alors n'importe quel $c \in]a,b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$. Mais $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De mÃªme comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$.

■

***Remarques* 4.1.** }

1. *Le théorème de Rolle est faux si f n'est pas dérivable sur tout l'intervalle $]a,b[$. En effet : la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable sur $I =]-1,1[$ sauf en 0, mais il n'existe pas de point $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.*
2. *Si la fonction n'est pas continue dans l'intervalle fermé, le théorème peut être en défaut. Par exemple, soit f la fonction définie comme suit*

$$x \in]a,b[\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}, \quad \text{et } \; f(a) = f(b) = 0.$$

Cette fonction est définie dans $[a,b]$, mais n'y est pas continue. Elle est continue seulement dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ et elle y aussi dérivable

$$f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2}.$$

Cette dérivée est strictement positive et ne s'annule pas dans $]a,b[$. Le théorème de Rolle ne s'annule pas.

Théorème des accroissements finis *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Démonstration *Considérons la fonction*

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

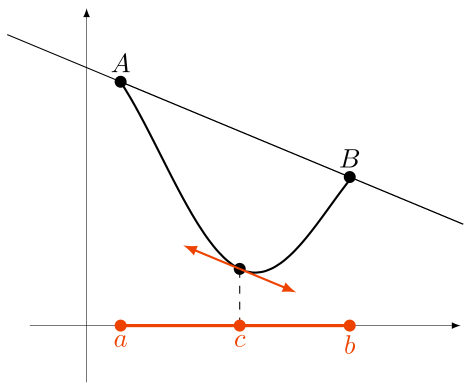
g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et vérifie $g(b) = g(a) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ce qui prouve le résultat.

4.4.2 Interprétation géométrique

On aura $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: autrement dit, la pente de la corde AB joignant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$ est égale à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M_c = (c, f(c))$. Le théorème affirme donc l'existence d'un point M sur la courbe représentative T_f de f, tel que la tangente en M à T_f est parallèle à la corde AB.



Corollaire *Soit f est une fonction continue sur $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

1. *Si $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.*

2. *f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$.*
3. *f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur $]a,b[$.*
4. *Si $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*
5. *Si $f'(x) < 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.*

Démonstration *Soient x_1 et x_2 deux points de I tels que : $x_2 > x_1$, d'après le T.A.F il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que : $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$.*
Pour 1, $f'(c) = 0$ donc $f(x_2) = f(x_1)$ par suite f est constante sur I.
Pour 2, $f'(c) \geq 0$ donc $f(x_2) \geq f(x_1)$ par suite f est croissante sur I.
Réciproquememt, si f est croissante sur $[a,b]$. Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$ $(x \neq x_0)$ on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

par passage à la limite on obtient : $f'(x_0) \geq 0$. ce qui prouve 2, la propriété 3 se démontre de la même manière.

***Remarques* 4.2.**

1. *La réciproque de 4) est fausse ; par exemple la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante mais sa dérivée s'annule.*
2. *La réciproque de 1 est vraie.(Trivial).*
3. *Le point 1 est faux si I n'est pas un intervalle. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ l'application*
$$f(x) = arctan(\frac{1}{x}) + arctanx.$$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est nulle. Il ne faut pas pour autant en conclure que f est constante sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. D'après le 1 la fonction est constante sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Pour calculer la constante correspondante, on choisit un nombre réel dans chacun de ces intervalles, par exemple 1, dans le premier et -1 dans le second.

Théorème des accroissements finis généralisé *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

A partir de ce théorème, on montre les règles de de l'Hospital.

4.5 Règles de de l' Hospital

Les règles de de l' Hospital sont très utiles pour calculer les limites qui se présentent sous les formes indéterminées de type : $\frac{0}{0}$ *et* $\frac{\infty}{\infty}$.

Règles de de l' Hospital

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$, $a<b$, dérivables sur $]a,b[$. Alors nous avons les règles suivantes :

1. *Si $f(a)=g(a)=0$ et $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. *Si $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
3. *Si $b=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
4. *Si $b=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Remarque* 4.11.** *Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas une forme indéterminée en a, et si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existent, ces limites sont en général distinctes. En effet, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{2x+1}=\frac{1}{3}$ mais $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2}=1$.*

***Exemple* 59.** *Calculer $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. On a $\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n$, donc $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$.*

***Exemple* 60.** *Calculer $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$. On a $\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x+1}-1)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}=0$.*

***Remarque* 4.12.** *On peut réappliquer la règle de de l'hospital succéssivement autant de fois que les hypothèses sont vérifiées.*

***Exemple* 61.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x}{3x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2-2}{6x-2}=\frac{-2}{-2}=1.$$

***Exemple* 62.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\ \left([\frac{\infty}{\infty}]\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\ \left([\frac{\infty}{\infty}]\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

***Exemple* 63.**

$$\lim_{x\to 0^+}x^a\ln(x),(a>0)\ \left([-0.\infty]\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-a}}\ \left([\frac{\infty}{\infty}]\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a}{-a}=0.$$

***Exemple* 64.**

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\ \left([\infty-\infty]\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\ \left([\frac{\infty}{\infty}]\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\ \left([\frac{\infty}{\infty}]\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

A titre d'exercices calculer les limites suivantes

Exercice 2.

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=0\ \textit{(c'est une forme indéterminée)}\ [0^0]$$

Exercice 3.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(tg(x))^{cos(x)}=1\ \textit{(c'est une forme indéterminée)}[0.\infty].$$

Exercice 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+sin(\frac{3}{x})\right)^x\ \textit{(c'est une forme indéterminée)}[1^\infty].$$

4.6 Fonctions convexes

Définition *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite Convexe si pour tous $x_0,x_1\in I$ et $\lambda\in[0,1]$,*

$$f(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)\le\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_1).$$

Concave si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \geq \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1).$$

Si les inégalités $\leq$ (resp. $\geq$) sont strictes on dit que f est strictement convexe (resp. strictement concave).

4.6.1 Interprétation géométrique

Posons :

$$x(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \quad et \quad y(\lambda) = \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1).$$

Quand λ décrit l'intervalle $[0,1]$, $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ décrivent respectivement les intervalles $[x_0, x_1]$ et $[f(x_0), f(x_1)]$. Soient $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_1(x_1, f(x_1))$ deux points de C_f.
On dit que f est convexe si l'arc M_0M_1 du graphe reste au-dessous de la corde M_0M_1 pour tous x_0 et x_1 dans I, voir Fig. 2.
On dit que f est concave si l'arc M_0M_1 du graphe reste au-dessus de la corde M_0M_1 pour tous x_0 et x_1 dans I, voir Fig. 3.

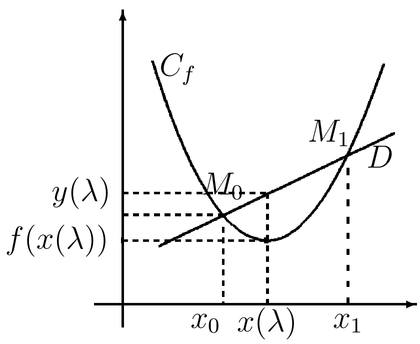


Fig.2. Fonction convexe

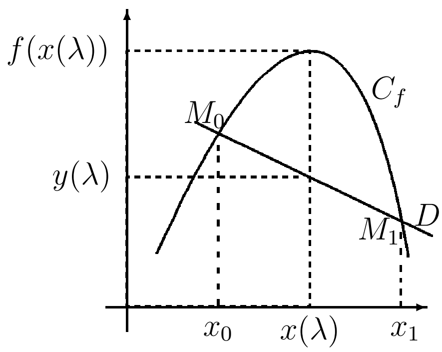


Fig.3. Fonction concave

Propriété *Si f est une fonction continue deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors*
- *f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.*
- *f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

4.7 Plan d'étude d'une fonction

Les étapes à suivre pour étudier une fonction f sont, en général

1. *Domaine de définition de f, noté D_f.*
2. *Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.*

3. *Symétrie du graphe C_f de f ; domaine d'étude.*
4. *Limites aux bornes du D_f.*
5. *Etude des branches infinies, détermination des asymptotes.*
6. *Tableau de variation.*
7. *Tracer le graphe.*

Soient f une fonction, D_f son domaine de définition et C_f son graphe dans un repère (O, x, y).

1. ***Parité.*** *Supposons que pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$.*
   a) *On dit que f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Dans ce cas C_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, par suite il suffit d'étudier f sur $D_f \bigcap \mathbb{R}^+$.*
   b) *On dit que f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas C_f admet l'origine comme centre de symétrie donc il suffit d'étudier f sur $D_f \bigcap \mathbb{R}^+$.*

   ***Exemple* 65.** *$f(x) = x^2$. Plus généralement si $f(2a - x) = f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour C_f.*
   ***Exemple* 66.** *: $f(x) = x^3$. Plus généralement si $f(2a - x) = 2b - f(x)$, alors le point $M(a, b)$ est un centre de symértie pour C_f.*

2. **Périodicité** *On dit que f est périodique s'il existe un nombre réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. Le plus petit réel qui vérifie la relation est dit la période de f. Si f est périodique de période T_0, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T_0.*
   ***Exemple* 67.** *Soit $f(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x. On a*

   $$f(x + 1) = x + 1 - E(x + 1) = x + 1 - (E(x) + 1) = f(x)$$

   donc f est périodique de période 1.

3. ***Asymptotes***
   a) ***Asymptote parallèle à*** (Oy) *(verticale). On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à C_f si*

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad ou \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

   ***Exemple* 68.** *Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. Les droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$ sont des asymptotes à C_f.*

   b) ***Asymptote parallèle à*** (Ox) *(horizontale.) On dit que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à C_f si*

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a, \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

***Exemple* 69.** *Soit* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. *La droite d'équation* $y = 1$ *est une asymptote à* C_f.

c) ***Asymptote oblique.*** *On dit que la droite d'équation* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *est une asymptote à* C_f *si* f *admet en l'infini une limite infinie et si*

$$\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

***Remarque* 4.13.** *En pratique, si* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$, *on calcule* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. *Si cette limite existe et est non nulle on la pose égale à* a. *Pour déterminer* b *on calcul* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x) - ax)$.

***Remarque* 4.14.** *Si* $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ *alors la droite d'équation* $y = ax + b$ *est une asymptote à* C_f.

***Exemple* 70.** *Soit* $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x}$, *donc la droite d'équation* $y = 2x - 1$ *est une asymptote à* C_f.

4. ***Points d'inflexions*** *Soit* f *une fonction deux fois dérivable en* x_0. *Si* $f''(x_0) = 0$ *en changeant de signe on dit que le point* $M_0(x_0, f(x_0))$ *est un point d'inflexion. Dans ce cas la courbe* C_f *traverse la tangente en* M_0.
   ***Exemple* 71.** *Le point* $M(0, 0)$ *est un point d'inflexion de la fonction* $f(x) = x^3$.

5. **Calcul et étude du signe de** f'**.** *On calcule* f', *puis on détermine les points* x *tels que* $f'(x) = 0$ *qui constituent les extrêmums de* f. *Le signe de* f' *donne son sens de variation. Si* f *n'est pas dérivable en un point* a, *on regarde les demi tangentes à droite et à gauche du point* a. *Si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty.$$

Alors f *admet une demi tangente verticale au point* a. *Les quatres directions possibles des demi-tangentes sont résumées dans le tableau suivant :*

$\lim \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \to a^-$	*dirigée vers le haut*	*dirigée vers le bas*
$x \to a^+$	*dirigée vers le bas*	*dirigée vers le haut*

5 Fonctions Usuelles

5.1 Fonctions puissances

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto x^n$.
La fonction f est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair. Il suffit alors d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$. On a

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Donc f est strictement croissante sur R^+. Nous avons alors le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
nx^{n-1}		$+$	
x^n	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque f^{-1}, appelée racine n-ième définie par :

$$f^{-1} : \quad \begin{array}{rcl} R^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \end{array}$$

est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ dérivable pour $x > 0$ de dérivée :

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.}$$

Nous avons alors les graphes des fonctions $f(x) = x^n$ et de sa réciproque, (voir Fig. 1).

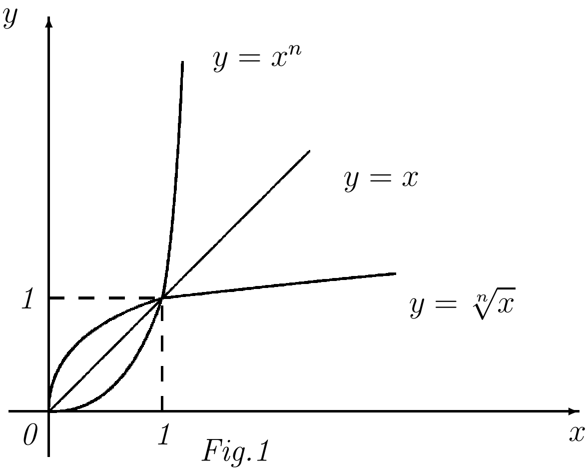


Fig.1

***Remarque* 5.1.** *Les graphes de $y = x^n$ et $y = \sqrt[n]{x}$ sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$. C'est toujours le cas des graphes de f et f^{-1}.*

***Remarque* 5.2.**

1. *Si $n = 1$, on pose $\sqrt[1]{x} = x$.*
2. *Si $n = 2$, on pose $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$; appelée racine carrée de x.*
3. *Si $n = 3$, $\sqrt[3]{x}$ est appelée racine cubique de x.*
4. *L'équation, $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}^+$ donné, admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ qui est $x = \sqrt[n]{a}$.*
5. *Le symbole $\sqrt[n]{a}$ représente un nombre réel positif et n'a de sens que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$.*
6. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ impair la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est continue strictement croissante sur R donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc l'équation $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$ donné possède des solutions négatives si n est impair.*

5.2 Fonction logarithme népérien

Définition *On appelle fonction logarithme népérien, la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, notée ln, telle que :*

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \quad et \quad ln1 = 0.$$

Propriété *La fonction ln vérifie les propriétés suivantes : Pour tous* $a > 0$, $b > 0$ *et* $r \in \ Q$ *on a*

1. $ln(ab) = lna + lnb.$
2. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln(a^r) = rlna.$

Preuve.

1. *Soit* $a > 0$ *fixé, et* f *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$f(x) = ln(ax) - lnx - lna.$$

Si $x > 0$ *on a* $f'(x) = a(ln)'(ax) - \frac{1}{x} = a\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$*, donc* f *est constante sur* $]0,+\infty[$*, de plus* $f(1) = 0$*, donc* $f(x) = 0$ *pour tout* $x > 0$*. En particulier, pour tout* $x = b$ *on obtient la propriété* 1.

2. *D'après* 1*, on a* $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna + ln\left(\frac{1}{b}\right)$ *; car* $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$ *D'autre part, on a :* $1 = b.\frac{1}{b}$*, donc* $ln1 = lnb + ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$*, par suite* $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -lnb$*. D'où 2.*

3. *Soit* $a > 0$*, pour établir* 3*, supposons que* $r \in \ N^*$*. On a :* $a^2 = aa$*, donc, d'après* 1*,* $lna^2 = lna + lna = 2lna$*. On écrit* $a^r = aa\dots a$*, on montre par récurrence que* $ln(a^r) = rlna$*. De même on sait que* $a = (\sqrt[r]{a})^r$ *donc* $lna = rln(\sqrt[r]{a})$*, d'où*

$$ln\left(\sqrt[r]{a}\right) = \frac{1}{r}lna$$

Si p *et* q *sont dans* $\mathbb{N}^*$*, on peut écrire*

$$ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = ln\left(\sqrt[q]{a^p}\right) = \frac{1}{q}ln\left(a^p\right) = \frac{p}{q}lna.$$

Si $r \in \mathbb{Q}^*_-$*, on pose* $r' = -r > 0$*, donc*

$$ln\left(a^r\right) = ln\left(\frac{1}{a^{r'}}\right) = -ln\left(a^{r'}\right) = -r'lna = rlna.$$

Enfin, si $r = 0$ on a : $a^0 = 1$ donc $ln(a^0) = ln1 = 0 = 0lna$. On montrera plus tard que la propriété 3, est vraie pour tout réel $r \geq 0$.

Etude de la fonction ln

Il résulte de sa définition que la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue. De plus sa dérivée est strictement positive donc elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Etudions les limites de la fonction ln en $+\infty$ et en 0^+. Pour tout $n \in N$, on a $ln(2^n) = nln2$ et $ln2 > ln1 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ln(2^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} nln2 = +\infty$. En particulier, si $x > 2^n$ alors $lnx > nln2$, ce qui montre que

$$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty.$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx$, on pose $t = \dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} t = +\infty$. D'où

$$\lim_{x\to 0^+} lnx = \lim_{t\to+\infty} ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to+\infty} lnt = -\infty.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative Γ de ln. Nous pouvons donc énoncer

Propriété *La fonction ln est continue, dérivable, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et l'image de $]0, +\infty[$ par la fonction ln est l'intervalle $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.*

Nous avons alors le tableau de variation de ln :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	||	$+$	1	$+$	
lnx	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque 5.3. *La fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, il existe donc un unique nombre réel e tel que $lne = 1$; $e \simeq 2,71828$.*

Propriété *La fonction ln vérifie les propriétés suivantes :*

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1, \quad 2.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0, \quad 3.\ \lim_{x\to 0^+} xlnx = 0.$$

Preuve : *La première limite n'est autre que la dérivée de* $ln(1+x)$ *en 0 qui est égale à 1. Pour établir* 2, *on applique la règle de de l'Hospital ; en effet*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Pour 3, *on pose* $u=\frac{1}{x}$, *on obtient* $xlnx=-\frac{lnu}{u}$, *il suffit alors d'appliquer* 2.

***Remarque* 5.4.** *: On a :* $(lnx)''=-\frac{1}{x^2}<0$, *donc la fonction ln est concave, par suite la courbe représentative* Γ *de ln est au-dessous de la tangente en tout point de* Γ. *La tangente au point* $(1,0)$ *a pour équation* $y=x-1$ *donc*

$$\boxed{\textit{pour tout } \ x>0, \quad lnx<x-1.}$$

Propriété *Soit* f *une fonction dérivable en un point* x_0. *Si* $f(x_0)\neq 0$ *alors la fonction* $ln|f|$ *est dérivable en* x_0 *et on a :*

$$(ln|f|)'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Cette dérivée est appelée dérivée logarithmique de f *en* x_0.

5.3 Fonctions exponentielles

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$. *Elle admet donc une fonction réciproque, notée* exp, *définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $]0,+\infty[$. *Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base e ou, plus simplement, fonction exponentielle. On a alors*

$$\boxed{\forall x\in\ R \quad y=\exp(x)\Longleftrightarrow x=lny}$$

***Remarque* 5.5.** *Si* $r\in\ Q$, $r=rlne=ln(e^r)$ *et donc* $\exp(r)=e^r$. *Cela signifie que la fonction exponentielle de base e est un prolongement à* $\mathbb{R}$, *tout entier, de la fonction* $x\in\mathbb{Q}\longrightarrow e^x$. *On écrit alors, par convention,* $\exp(x)=e^x$ *pour tout* $x\in\ R$.

Propriété *La fonction exponentielle est continue, dérivable, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie*

$$\forall\ x\in\ R \qquad (e^x)'=e^x.$$

Preuve. *Puisque, ln est continue, strictement croissante, il en est de même da sa fonction réciproque. D'autre part, ln est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas, donc la fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *posons* $e^x = y$ *ceci équivaut à* $x = lny$. *D'où*

$$(e^x)' = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Les autres propriétés de la fonction exp *se déduisent de celles de la fonction ln. Nous pouvons donc énoncer*

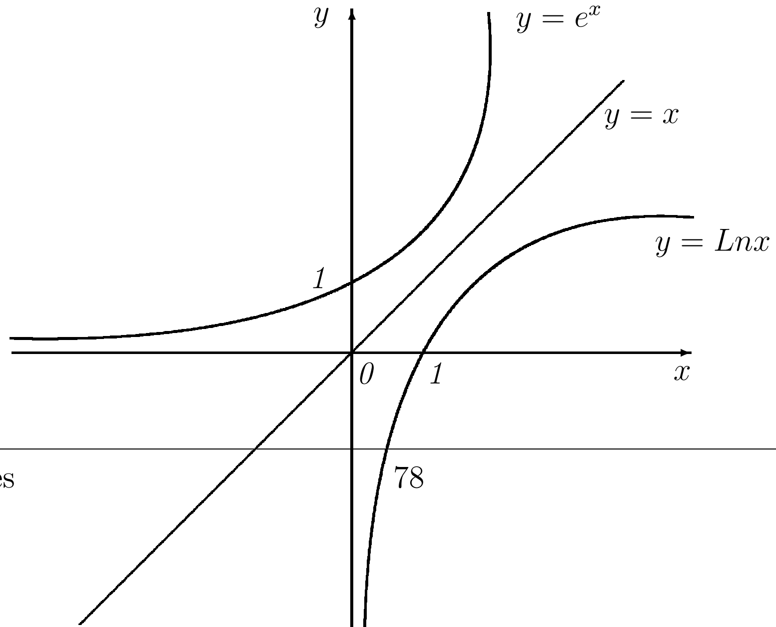
Propriété *Pour tous* a, b *dans* $\mathbb{R}$ *et* $r \in Q$ *on a :*

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{ra} = (e^a)^r.$$

Nous avons aussi les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la première biscectrice. Nous avons alors les graphes des fonctions ln et exp, voir $Fig.2$.



5.4 Fonction logarithme de base a

Définition *Soit a un nombre réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. On appelle fonction logarithme de base a, notée log_a, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :*

$$log_a x = \frac{lnx}{lna}.$$

***Remarque* 5.6.**

1. *Si $a = e$, on a : $log_e x = lnx$, c'est donc le logarithme népérien.*
2. *Si $a = 10$, on a : $log_{10} x = \frac{lnx}{ln10}$, appellé logarithme décimal et noté $logx$.*
3. *Les propriétés de la fonction log_a se déduisent de celle de ln.*

Propriété *La fonction logarithme de base a, $(a > 0, a \neq 1)$, est continue, dérivable, strictement monotone sur $]0, +\infty[$. De plus, si x, y sont dans $]0, +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a*

1. $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$
2. $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
3. $log_a(xy) = log_a x + log_a y, log_a(x^r) = rlog_a x$

On a : $(log_a x)' = \dfrac{1}{xlna}$, donc le signe de $(log_a x)'$ est celui de lna, elle est donc strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$. D'où les deux tableaux de variations suivants :

$a > 1$

x	0		$+\infty$
$\frac{1}{xlna}$		$+$	
$log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$0 < a < 1$$

x	0		$+\infty$
$\frac{1}{xlna}$		$-$	
$log_a x$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

5.5 Fonctions exponentielles de base a

Si $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction log_a est continue strictement monotone donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque appelée fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est définie sur $\mathbb{R}$ et caractérisée par : Pour tout x réel

$$y = \exp_a x \Longleftrightarrow x = \frac{lny}{lna} \Longleftrightarrow lny = xlna \Longleftrightarrow y = e^{aLnx}.$$

Donc en remplaçant y par $\exp_a x$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \ R \quad \exp_a x = e^{xlna}, \quad a > 0, \quad a \neq 1}$$

***Remarque* 5.7.** *: Si $x \in \ Q$, on a :*

$$\exp_a x = e^{xlna} = e^{ln(a^x)} = a^x.$$

On pose alors, par convention,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a x = e^{xlna} = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1}$$

Avec cette convention on a pour tout $a > 0$, $(a \neq 1)$ et pour tout x réel (et non plus seulement rationnel) :

$$\boxed{lna^x = xlna \quad \text{ou encore} \quad a^x = e^{xlna}}$$

***Remarque* 5.8.** *Ces deux formules restent vraies pour $a = 1$ car $1^x = 1$ pour tout x réel (cf. remarque précédente).*

***Remarque* 5.9.** *Si $a > 0$, $(a \neq 1)$ on a pour tout $x > 0$ et pour tout α réel (et non plus seulement rationnel) :*

$$log_a(x^\alpha) = \frac{ln(x^\alpha)}{lna} = \alpha \frac{lnx}{lna} = \alpha log_a x.$$

Nous avons alors les formules suivantes :

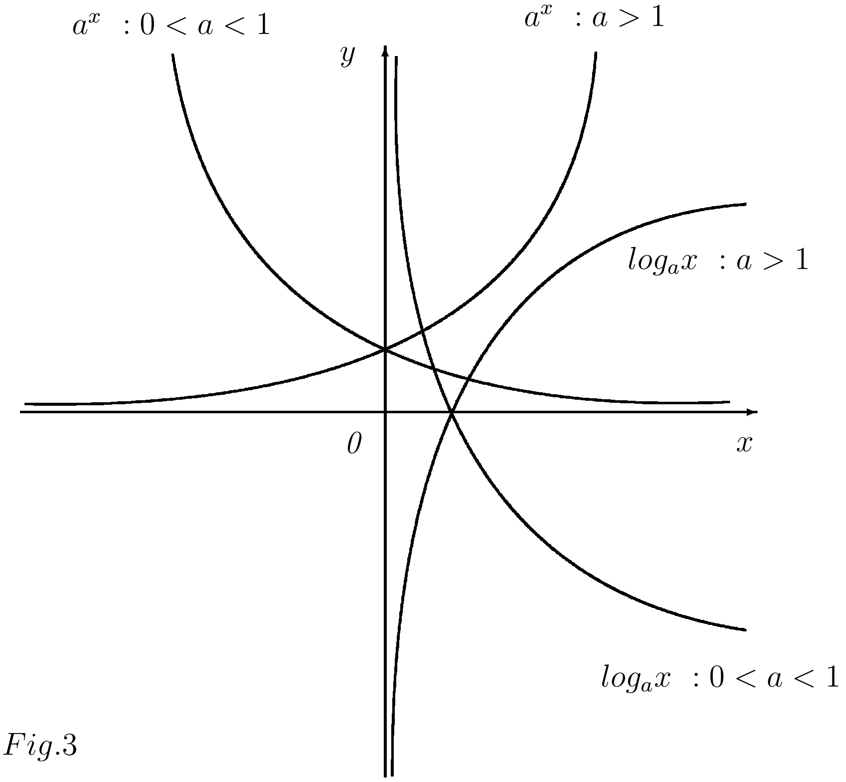
Propriété *Pour* $a > 0,\ b > 0,\ x$ *et* y *dans* $\mathbb{R}$*, on a :* $1.a^x a^y = a^{x+y}$
$2.(a^x)^y = a^{xy}$
$3.a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
$5.a^x b^x = (ab)^x$

Etude de la fonction exp_a
Si $a > 0$, $\exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$, *donc l'étude de* exp_a *se déduit facilement de la fonction exponentielle. Elle est en particulier positive dérivable sur* R*, de dérivée*

$$(exp_a(x))' = (a^x)' = (e^{xlna})' = e^{xlna}lna = a^x lna$$

Elle est donc strictement croissante sur R *si* $a > 1$ *et strictement décroissante si* $0 < a < 1$*, constante si* $a = 1$.

***Remarque* 5.10.** *Dans cette étude nous avons utilisé l'expression explicite de la fonction* $\exp_a$ *pour* $a > 0$ *;* $\exp_a(x) = e^{xlna}$. *Si* $a > 0$ *et* $a \neq 1$*, les propriétés de* exp_a *se déduisent aussi de celles de* log_a *car c'est sa réciproque ! Nous avons alors les graphes suivants : (voir* $Fig.3$*).*



$Fig.3$

Définition *Pour tout réel k, on appelle fonction puissance k-ème la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par*

$$f(x) = x^k = e^{klnx}.$$

Cette fonction est positive dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée

$$f'(x) = kx^{k-1}.$$

Elle est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$ si $k>0$, strictement décroissante si $k<0$, constante si $k=0$.

Nous avons les limites suivantes

Propriété *La fonction puissance vérifie :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^\alpha} = 0$ *si* $\alpha > 0$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{lnx}{x^\alpha} = 0$ *si* $\alpha < 0$,
3. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$, *si* $a > 1, \alpha \in R$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = +\infty$, *si* $0 < a < 1$, *et* $\alpha \in R$.

Preuve : *Pour* 1, *on écrit* $\dfrac{lnx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{lnx^\alpha}{x^\alpha}$, *et on applique la proposition 3.3 (2). Pour* 2, *on pose* $u = \dfrac{1}{x}$ *et on applique* 1. *Pour* 4, *on a :* $\dfrac{x^\alpha}{a^x} = \dfrac{x^\alpha}{e^{xlna}}$. *Si* $\alpha \leq 0$ *le résultat est évident. Si* $\alpha > 0$, *on pose* $u = e^x$, *on obtient :*

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{lnu}{(u)^{\frac{lna}{\alpha}}}\right)^\alpha,$$

il suffit alors d'appliquer 1. *Pour* 5, *on pose* $b = \dfrac{1}{a}$ *et on applique* 4. *Pour* 3, *soit* $h = \dfrac{1}{x}$, *on a :*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = exp\left(xln(1+\frac{1}{x})\right) = exp\left(\frac{ln(1+h)}{h}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$, *on a :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0^+} exp\left(\frac{ln(1+h)}{h}\right) = e.$$

5.6 Fonctions hyperboliques

Définition *Les fonctions hyperboliques sont :*
- *Cosinus hyperbolique, notée ch, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- *Sinus hyperbolique, notée sh, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- *Tangente hyperbolique, notée th, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

- *Cotangente hyperbolique, notée coth, définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$cothx = \frac{1}{thx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Propriété *Les fonctions hyperboliques vérifient les propriétés suivantes :*
1. La fonction ch est définie, paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.
2. La fonction sh est définie, impaire, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction th est définie, impaire, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction coth est définie, impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ *et strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

On a les formules suivantes dont la vérification est laissée aux étudiants.

$$ch(a+b) = chachb + shashb, \qquad sh(a+b) = shachb + chashb.$$

$$ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a), \qquad sh(2a) = 2shacha, \qquad ch^2x - sh^2x = 1.$$

En outre, nous avons les propriétés suivantes :

$$(chx)' = shx, \qquad \lim_{x\to+\infty} shx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} thx = -1,$$

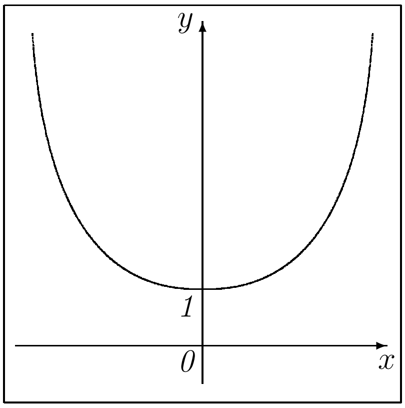
$$(shx)' = chx, \qquad \lim_{x \to -\infty} shx = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} cothx = 1,$$

$$(thx)' = 1 - th^2x, \qquad \lim_{x \to +\infty} chx = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} cothx = -1,$$

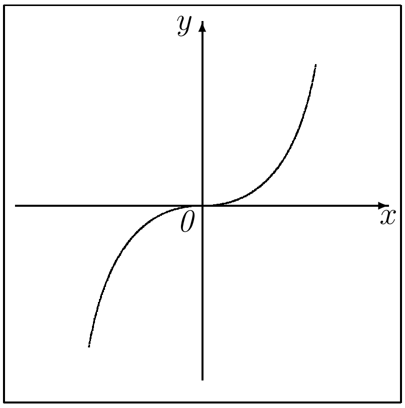
$$(cothx)' = 1 - coth^2x, \qquad \lim_{x \to -\infty} chx = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} cothx = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} thx = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} cothx = -\infty.$$

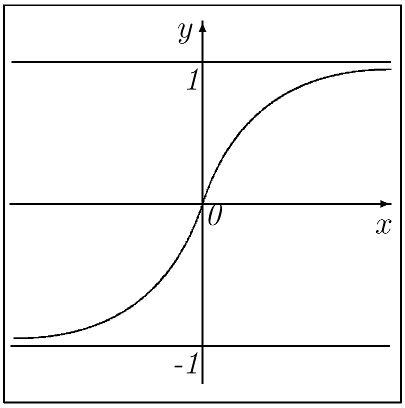
Les graphes des fonctions hyperboliques sont donnés par :



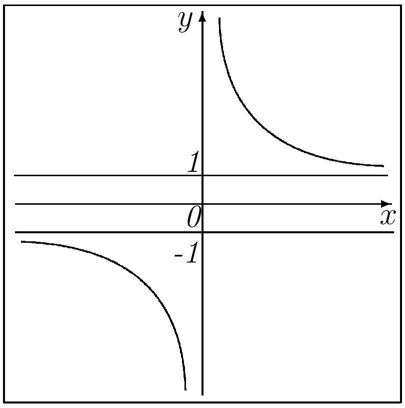
$y = chx$



$y = shx$



$y = thx$



$y = cothx$

5.7 Fonctions hyperboliques réciproques

5.7.1 Argument cosinus hyperbolique

La fonction ch est continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ *vers* $[1, +\infty[$. *Sa fonction réciproque, notée argch, appelée « argument cosinus hyperbolique », est dérivable et strictement croissante sur* $[1, +\infty[$. *Pour* $x \geq 1$ *posons* $y = argchx$, *donc* $x = chy$ *et* $shy = \sqrt{x^2 - 1}$ *car* $shy \geq 0$ *si* $y \geq 0$. *De plus on a :* $e^y = chy + shy = x + \sqrt{x^2 - 1}$ *donc*

$$\boxed{argchx = Ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad si \quad x \geq 1.}$$

5.7.2 Argument sinus hyperbolique

La fonction shx est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque nommée ≪ argument sinus hyperbolique ≫, notée $argsh$, est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $y = argshx$ on a donc $x = shy$ et $chy = \sqrt{x^2+1}$ car $chy > 0$. De plus on a : $e^y = shy + chy = x + \sqrt{x^2+1}$ donc

$$\boxed{argshx = Ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad si \quad x \in \mathbb{R}.}$$

5.7.3 Argument tangente hyperbolique

La fonction thx est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. Sa fonction réciproque nommée ≪ argument tangente hyperbolique ≫, notée $argth$, est dérivable et strictement croissante sur $]-1, 1[$. Soit $x \in]-1, 1[$, on a :

$$y = argthx \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit que

$$\boxed{argthx = \tfrac{1}{2} Ln \frac{1+x}{1-x} \quad si \quad |x| < 1.}$$

5.7.4 Argument cotangente hyperbolique

La fonction $cothx$ est continue strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, 0[$) à valeurs dans $]1, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -1[$). Sa fonction réciproque nommée ≪ argument cotangente hyperbolique ≫, notée $argcoth$, est dérivable et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, -1[$). Soit $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$y = argcothx \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} Ln \frac{x+1}{x-1}$$

On en déduit que

$$\boxed{argcothx = \frac{1}{2} Ln \frac{x+1}{x-1} \quad si \quad |x| > 1.}$$

Propriété *Les fonctions réciproques hyperboliques vérifient les propriétés suivantes*

$$(argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} argchx = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} argcothx = 0,$$

$$(argshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} argshx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} argcothx = 0,$$

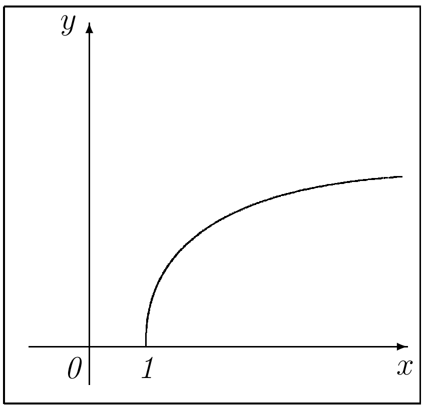
$$(argthx)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} argshx = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} argcothx = +\infty,$$

$$(argcothx)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to1^-} argthx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} argcothx = -\infty.$$

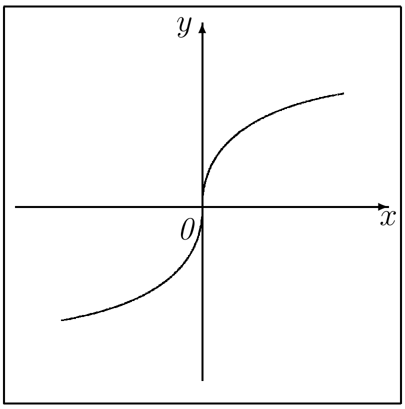
preuve : *Calculons par exemple la dérivée de la fonction argch. D'après la proposition 5.2.2 du chapitre II, nous avons : ch est continue et dérivable sur* $[0,+\infty[$. *Sa dérivée sh est strictement positive sur* $[0,+\infty[$. *Elle est bijective de* $]0,+\infty[$ *dans* $]1,+\infty[$. *Soit* $t\in]0,+\infty[$*,on a* $sht \neq 0$. *La fonction réciproque argch associée à la fonction ch est alors dérivable en* $x = cht$ *et*

$$argch'(x) = \frac{1}{sht} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

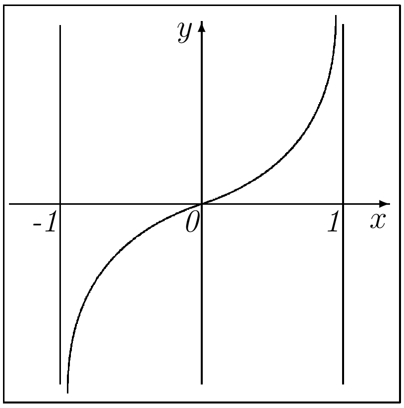
Nous laissons aux étudiants le soin de calculer les dérivées des fonctions argsh et argth. (Il est très important que les étudiants fassent ce genre de calculs). Nous avons alors les graphes des fonctions hyperboliques réciproques :



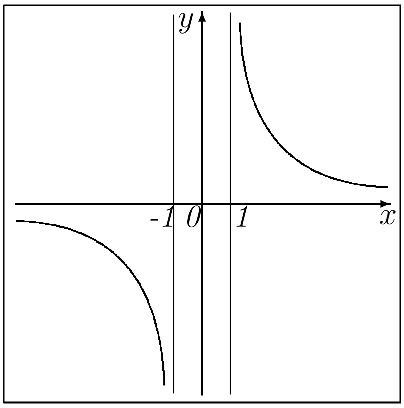
$y = argchx$



$y = argshx$



$y = argthx$



$y = argcothx$

5.8 Fonctions circulaires

A tout nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ *on peut associer un unique point* M *du cercle* $\mathcal{U}$ *centré à l'origine et de rayon 1 tel que l'angle* $(\widehat{Ox, OM})$ *soit de mesure* θ. *Soient* H *et* K *les projections orthogonales de* M *respectivement sur les axes* (Ox) *et* (Oy), *voir* $Fig.4$.

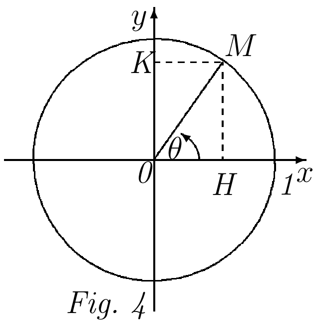


Fig. 4

On appelle $\cos\theta$ *l'abscisse* $x = \overline{OH}$ *de* M *;* $\cos\theta = x = \overline{OH}$.
On appelle $\sin\theta$ *l'ordonnée* $y = \overline{OK}$ *de* M *;* $\sin\theta = y = \overline{OK}$.
On appelle tangente de θ *le nombre noté,* $tg\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ *lorsqu'il existe.*
On appelle cotangente de θ *le nombre noté,* $cotg\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ *lorsqu'il existe.*

***Remarque* 5.11.** *Si* θ *est un nombre réel quelconque, alors on peut écrire* $\theta = \theta' + 2k\pi$ *avec* $0 \leq \theta' < 2\pi$ *et* $k \in Z$ *et on a :* $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ *et* $\sin(\theta) = \sin(\theta')$.

Définition *Les fonctions* sin, cos, *tg et cotg sont appelées fonctions circulaires ou fonctions trigonométriques.*

***Remarque* 5.12.** *1. Les fontions sinus et cosinus sont définies sur* R.
2. La fonction tangente est définie pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. La fonction cotangente est définie pour $x \neq k\pi$, $k \in Z$.

Propriété *Les fonctions circulaires vérifient les propriétés suivantes : Pour tout $x \in R$, on a :* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\cos(-x) = \cos(x)$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $tg(-x) = -tgx$ $cotg(-x) = -cotgx$

Valeurs remarquables

Nous présentons dans le tableau suivant; les valeurs des fonctions circulaires sinus et cosinus pour $x = 0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}$.

x	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*

Avant de passer à l'étude des fonctions circulaires, rappelons la propriété suivante concernant la monotonie de ses fonctions.

Propriété

1. $x \mapsto \sin x$ *est strictement croissante dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
2. $x \mapsto \cos x$; *est strictement décroissante dans* $[0, \pi]$
3. $x \mapsto \tan x$ *est strictement croissante dans* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
4. $x \mapsto \cot x$; *est strictement décroissante dans* $]0, \pi[$.

Démonstration *On a*

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x+x'}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x'-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Appliquons la formule de transformation

$$\sin x - \sin x' = 2\sin\frac{x'-x}{2}\cos\frac{x'+x}{2};$$

et remarquons que

$$\frac{x+x'}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow \cos\frac{x+x'}{2} > 0,$$

$$\frac{x'-x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \sin\frac{x'-x}{2} > 0.$$

On en déduit alors $\sin x' - \sin x > 0$, *d'où*

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin x < \sin x'.$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ *est strictement croissante dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *On laisse au lecteur le soin de démontrer les trois autres propriétés énoncées.*

5.9 Etude des fonctions circulaires

5.9.1 Fonction cosinus

La fonction $x \longmapsto \cos x$ *est définie, continue et dérivable sur* R. *De plus* $\cos$ *est paire, périodique de période* 2π *et vérifie* $\cos(\pi - x) = -\cos x$, *donc le point* $M(\frac{\pi}{2}, 0)$ *est un centre de symétrie. Il suffit alors d'étudier* $\cos$ *sur l'intervalle* $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $(\cos x)' = -\sin x$ *et* $\sin x \geq 0$ *sur* I. *On obtient alors :*

x	*0* $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$-\sin x$	$-$
$\cos x$	*1* $\searrow$ *0*

Représentation graphique de la fonction $\cos$: $(Fig.5)$

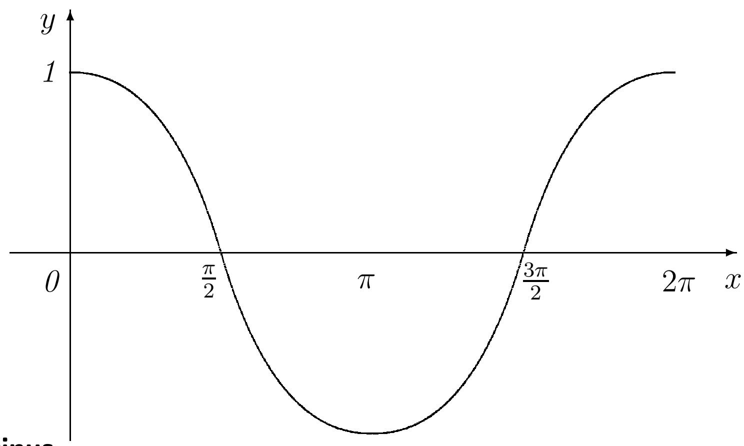


Fig. 5. $\quad y = cosx$

5.9.2 Fonction sinus

La fonction $x \longmapsto \sin x$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *De plus* $\sin$ *est impaire, périodique de période* 2π *et vérifie* $\sin(\pi - x) = \sin x$, *donc la droite d'équation* $x = \frac{\pi}{2}$

est un axe de symétrie. Il suffit alors d'étudier sin *sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a* $(\sin x)' = \cos x$. *Nous avons alors le tableau de variation.*

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$	
$\sin x$	$0 \nearrow$	1

Représentation graphique de la fonction sin, $(Fig.6)$ ***:***

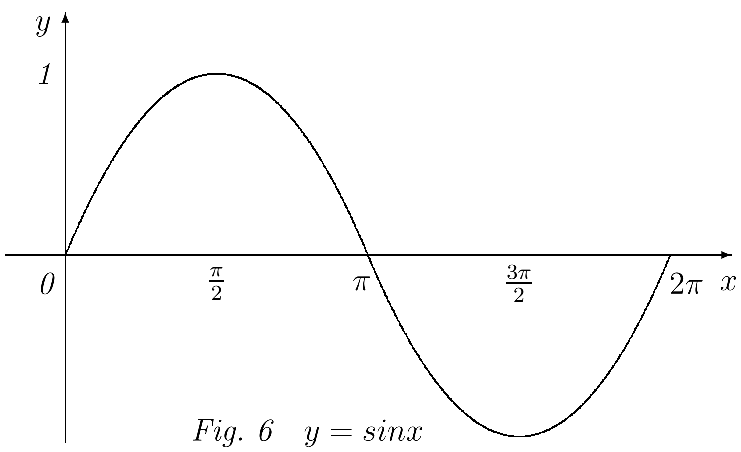


Fig. 6 $y = sinx$

5.9.3 Fonction tangente

La fonction $x \longmapsto \tan x$ *est continue et dérivable sur* $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. *De plus tg est impaire, périodique de période* π. *Il suffit alors d'étudier* tan *sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ *on a* $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, *d'où*
Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$+$	‖
$\tan x$	$0 \nearrow$	$+\infty$ ‖

Représentation graphique de la fonction tan, ***(Fig. 7) :***

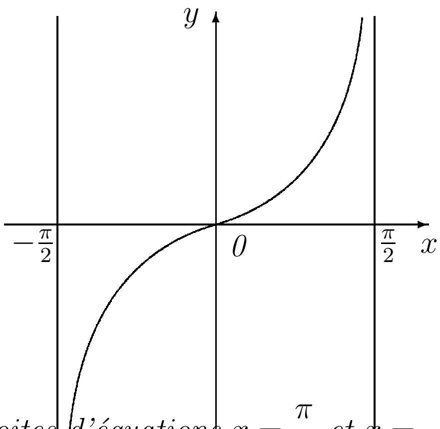


Fig.7. $y = \tan x$

Remarque 5.13. *1. Les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$ sont des asymptotes à la courbe représentative de tg.*
2. On a : $\tan''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, la dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe donc l'origine est un point d'inflexion.

5.9.4 Fonction cotangente

La fonction $x \longmapsto cotgx$ est dérivable sur $R \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. De plus cotg est impaire, périodique de période π. Il suffit alors d'étudier cotg sur l'intervalle $]0, \dfrac{\pi}{2}]$. On a

$$cotg'x = -(1 + cotg^2x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$-$	
$cotgx$	$+\infty$ $\searrow$	0

Représentation graphique de la fonction cotg, (Fig. 8) :

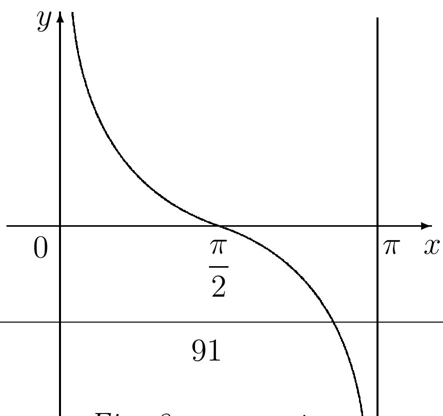


Fig. 8. $y = cotgx$

***Remarque* 5.14.** *Les droites d'équations $x = 0$ (l'axe (0y)) et $x = \pi$ sont des asymptotes.*

5.10 Fonctions circulaires réciproques

5.10.1 Fonction Arc cosinus

La fonction cosinus est continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc cosinus, notée arccos, *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \arccos\ : [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x, \end{array}$$

$$\boxed{y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}}$$

La fonction arccos *est continue, strictement décroissante, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée*

$$\boxed{(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

La fonction arccos *n'est ni paire ni impaire et vérifie*

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$$

***Exercice* 5.** *1) Montrer que :*

$$\forall x \in [-1,1], Arccos(-x) = \pi - Arccos(x).$$

2) Etudier les fonctions

$$g(x) = cos(Arccos(x)) \quad et \quad h(x) = Arccos(cos(x))$$

5.10.2 Fonction Arc sinus

La fonction sin *est continue strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc sinus, notée* arcsin, *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \arcsin\ : [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x, \end{array}$$

$$\boxed{y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

La fonction arcsin *est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée*

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

***Exercice* 6.** *1) Montrer que :*

$$\forall x \in [-1,1], Arcsin(-x) = -Arcsin(x).$$

2) Etudier les fonctions

$$g(x) = sin(Arcsin(x)) \quad et \quad h(x) = Arcsin(sin(x))$$

5.10.3 Fonction Arc tangente.

La fonction tg est continue strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ *donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc tangente, notée arctg, définie par :*

$$\begin{array}{rl} arctg \ :]-\infty,+\infty[& \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto arctgx, \end{array}$$

$$\boxed{y = arctgx \Longleftrightarrow \begin{cases} x = tgy \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

La fonction arctg est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur R de dérivée

$$\boxed{(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

***Exercice* 7.** *1) Montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, Arctg(-x) = -Arctg(x).$$

2) Etudier les fonctions

$$g(x) = tg(Arctg(x)) \quad et \quad h(x) = Arctg(tg(x))$$

3) Montrer que : $\quad Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si \quad x < 0 \end{cases}$

5.10.4 Fonction Arc cotangente

La fonction cotangente est continue strictement croissante sur $]0, \pi[$ *donc bijective.*
Sa fonction réciproque appelée Arc cotangente, notée arccotg, définie par :

$$\begin{array}{rcl} arccotg \ :]-\infty, +\infty[& \longrightarrow &]0, \pi[\\ x & \longmapsto & arccotg x, \end{array}$$

Je vous laisse le soin de temier la construction et de définir les propriétes de cette fonction.

***Remarque* 5.15.** *Remarque : Les représentation graphiques des fonctions réciproques se déduisent de celles des fonctions circulaires par symétrie par rapport à la première bissectrice.*

6

Formules de Taylor et Développements Limités

6.1 Fonctions équivalentes

Définition *Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0,(x_0 fini ou non). On dit que la fonctions f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

***Exemple* 72.** *On dispose d'une gamme d'infiniment petits particulièrement simple quand x tend vers 0, à savoir $x, x^2, ...x^n, ...$. La fonction x^n tend vers 0 d'autant plus vite que n est plus grand.*

Définition *Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou non). On dit que la fonctions f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) =^{+}_{-} \infty.$$

***Exemple* 73.** *La fonction $\frac{1}{x}$ est un infiniment grand au voisinage de 0.*

Définition *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou non). On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :*

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1, \quad \text{on écrit} \quad f \sim_{x_0} g.$$

***Remarque* 6.1.** *Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, la relation $f \sim_{x_0} g$ est équivalente à la propriété : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0.*

***Exemple* 74.** *Soit P le polynôme de degré n donné par :*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. On a : $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$. En effet :

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = a_n x^n h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1.$$

Définition *Si $f(x) \sim_0 ax^n$, on dit que ax^n est la partie principale de $f(x)$, et que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n.*

***Exemple* 75.** *Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\sin x \sim_0 x, \qquad \ln(1+x) \sim_0 x, \qquad 1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

***Exemple* 76.** *Quand x tend vers 0, $\sin x$ est un infiniment petit de partie principale x, d'ordre 1.*

***Exemple* 77.** *Quand x tend vers 0, la fonction $1 - cosx$ est un infiniment petit de partie principale $\frac{x^2}{2}$, d'ordre 2.*

***Exemple* 78.** *Quand x tend vers 0 x^3 est un infiniment petit d'ordre 3, de partie principale x^3. La relation $f \sim_{x_0} g$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions.*

Propriété *Si f tend vers une limite l en x_0, (l finie ou non) et si $f \sim_{x_0} g$ alors g tend vers l en x_0.*

Propriété *Si* $f_1 \sim_{x_0} f_2$ *et* $g_1 \sim_{x_0} g_2$ *alors* $f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2$ *et* $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_{x_0} \dfrac{f_2}{g_2}$.

***Exemple* 79.** *Calculer la limite, quand x tend vers 0, de :*

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2 Log(1+x)}.$$

On sait que : $1-\cos x \sim_0 \dfrac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim_0 x$ *et* $\ln(1+x) \sim_0 x$. *D'après la proposition précédente,* $f(x) \sim_0 \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$ *d'où* $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

***Exemple* 80.** *Trouver la limite, quand x tend vers $+\infty$, de :*

$$f(x) = \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3}.$$

On a : $e^{2x}+x^2 \sim_{+\infty} e^{2x}$ *car* $\dfrac{e^{2x}+x^2}{e^{2x}} = 1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ *tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, nous avons aussi* $e^x+x^3 \sim_{+\infty} e^x$, *d'où* $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ *par suite* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

***Remarque* 6.2.** **Erreur à éviter :** *Si* $f \sim_{x_0} f_1$ *et* $g \sim_{x_0} g_1$ *on n'a pas en général :*$f+g \sim_{x_0} f_1+g_1$, *ni* $f-g \sim_{x_0} f_1-g_1$

***Exemple* 81.**

$$\begin{cases} x+x^2 \sim_0 & x+x^3 \\ x \sim_0 & x \end{cases}$$

, *mais* $(x+x^2)-(x)$ *n'est pas équivalente à* $(x+x^3)-(x)$ *au voisinage de* 0.

***Exemple* 82.**

$$\begin{cases} cosx \sim_0 & 1 \\ 1 \sim_0 & 1 \end{cases}$$

, *mais* $(1-cos(x))$ *n'est pas équivalente à* $1-1=0$ *au voisinage de* 0.

***Exemple* 83.** *Si* $f(x) = x^2+1$ *et* $g(x) = -x^2+x+1$ *on a :* $f(x) \sim_{+\infty} f_1(x) = x^2$ *et* $g(x) \sim_{+\infty} g_1(x) = -x^2$. *Mais* $f(x)+g(x) = x+2$ *et* $f_1(x)+g_1(x) = 0$. *On ne peut pas non plus composer des équivalents : ainsi on a par exemple*

$$(x+x^2) \sim_{+\infty} x^2$$

mais

$$\frac{e^{x+x^2}}{e^{x^2}} = e^x \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$f \sim_\infty g$$

6.2 Formules de Taylor

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, (dérivable autant de fois que nécessaire) sur l'intervalle I, a un point de I et m un entier. La formule de Taylor à l'ordre m permet d'approcher $f(x)$, pour x voisin de a, par une expression ne dépendant que de $f(a), f'(a), ..., f^m(a)$ et de x (et donc pas de f(x).) Par exemple pour une fonction f dérivable la formule des Accroissements Finis permet d'approcher f par un polynôme de degré 1.

Formule de Taylor-Lagrange *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor d'ordre $n-1$. Le dernier terme est appelé reste ou reste de Lagrange.
Preuve : *Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par :*

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^n M}{n!}$$

où M est une constante telle que $g(a) = 0$. Puisque f est de classe C^{n-1}, alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $g(a) = g(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(x) = -(b-x)f''(x) + \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}M.$$

Après simplifications, on trouve :

$$g'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}[M - f^{(n)}(x)].$$

Or ; $g'(c) = 0$ donc $M = f^{(n)}(c)$. En outre, $g(a) = 0$ d'où le résultat.

Remarque 6.3. *Le théorème reste vrai même si $b < a$. En effet, la démonstration précédente ne fait intervenir aucune des conditions $b < a$ ou $b > a$. De plus, on a : $g(a) = g(b) = 0$.*

Remarque 6.4. *Le nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$. Comme conséquence immédiat du théorème* 4.2.1 *ci-dessus on a la formule de Taylor Mac-Laurin :*

Formule de Taylor-Mac-Laurin *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[0,x]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]0,x[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x), \ 0 < \theta < 1.$$

Preuve : *On applique le théorème ci dessus avec $a = 0$ et $b = x$.*

***Remarque* 6.5.** *Si on prend $b = a + h$ ($h < 0$ ou $h > 0$), on aura :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a + \theta h).$$

***Exemple* 84.** *Soit $f(x) = e^x$, pour tout $n \in N$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc pour tout $x \in R$ on a :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

La formule de Taylor est applicable aux polynômes de degré n. Ils sont infiniment dérivables et la dérivée d'ordre $n+1$ est identiquement nulle. On peut remarquer que si :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \Rightarrow p(0) = a_0$$

$$p'(x) = a_1x + 2a_2x + 3a_3x^2 ... + na_nx^{n-1} \Rightarrow p'(0) = a_1$$

$$p''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x ... + n(n-1)a_nx^{n-2} \Rightarrow p''(0) = 2!a_2$$

$$p'''(x) = 3 \times 2 \times 1a_3 + ... + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \Rightarrow p'''(0) = 3!a_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

On a donc bien :

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Formule de Taylor-Young *Soit f une fonction de classe C^n sur un voisinage I de x_0. Alors pour tout $x \in I$ on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

où ε une fonction définie sur I telle que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve : *Appliquons la formule de Taylor d'ordre n à la fonction f sur $[x_0, x]$ (on suppose $x_0 < x$). Alors, il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

avec : $c_x = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$ *et* $\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

On a bien : $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ *car* $\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(x_0)$.

***Remarque* 6.6.** *: Puisque $\varepsilon(x)$ tend vers 0 en x_0, $f(x)$ est équivalente au voisinage de x_0 au polynôme en x suivant*

$$f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

***Remarque* 6.7.** *:Si on pose $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Young on obtient la formule de Mac-Laurin-Young.*

***Exemple* 85.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$.

***Remarque* 6.8.** *La différence essentielle entre les formules est que la formule de Taylor-Young est d'utilisation locale (c'est à dire pour h petit, voir les détails au chapitre suivant) alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur le segment $[a, a+h]$ même si h n'est pas petit.*

***Exercice* 8.** *Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :*

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}$$

---

corrigé

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application $x \to x^{\frac{3}{2}}$. Il s'agit d'encadrer la différence $f(x+1) - f(x)$ et pour cela nous écrivons une formule de Taylor au point x. Pour tout nombre $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ et $f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$. La dérivée seconde f'' est continue sur

$]0,+\infty$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty$. Si a et b appartiennent à l'intervalle $]0,+\infty$, la formule de Taylor à l'ordre 2 au point a s'écrit :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f"(\theta)$$

où θ est un nombre entre a et b. Soit x un nombre strictement positif. Appliquons cette formule en prenant $a=x$ et $b=x+1$, nombres qui sont bien tous deux strictement positifs :
il existe un nombre θ compris entre x et $x+1$ tel que

$$f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(x)+\frac{(x+1-x)^2}{2}f"(\theta)=f'(x)+\frac{f"(\theta)}{2}.$$

Comme la fonction $f"$ est décroissante, on a $f"(x+1)\leq f"(\theta)\leq f"(x)$ donc

$$f'(x)+\frac{f"(x+1)}{2}\leq f(x+1)-f(x)\leq f'(x)+\frac{f"(x)}{2}.$$

Ce sont les inégalités qu'il faut démontrer.

6.3 Applications de la formule de Taylor

6.3.1 Calcul approché des valeurs d'une fonction

Si une fonction f vérifie sur $[x_0,x_0+h]$ les condition d'application de la formule de Taylor, on a :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

En supposant $f^{(n+1)}$ bornée sur le segment $[x_0,x_0+h]$, on peut prendre pour valeur approchée de $f(x_0+h)$ le nombre

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

l'erreur commise étant majorée par :

$$\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}\quad max_{t\in[x_0,x_0+h]}|f^{(n+1)}(t)|.$$

6.3.2 Démonstration d'inégalités

En majorant ou en minorant le reste dans la formule de Taylor-Lagrange, on démontre des inégalités. Par exemple, pour la fonction $\cos x$*, on a :*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24}\cos(\theta x), \quad \textit{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *par exemple on* $0 < \cos(\theta x) \leq 1$*. D'où l'on déduit pour* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *:*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24}.$$

6.3.3 Ordre de multiplicité des racines d'une équation

Si la fonction f *s'annule pour* $x = x_0$ *et s'il existe un entier* $p \geq 1$ *tel que* $f(x) = (x - x_0)^p g(x)$ *avec* $g(x_0) \neq 0$*, on dit que* x_0 *est une racine d'ordre* p *de l'équation* $f(x) = 0$*. Il n'est pas toujours possible de définir l'ordre d'une racine. La proposition suivante permet en utilisant la formule de Taylor-Young de caractériser les zéro d'ordre* p *d'une fonction* f*.*

Propriété *Si* f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^{p-1}$ *dans un voisinage de* x_0 *et admet une dérivée d'ordre* p *en* x_0*. Alors* x_0 *est un zéro d'ordre* p *de* f *si et seulement si :*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad \textit{et} \quad f^{(p)}(x)(x_0) \neq 0.$$

Démonstration *En effet d'après la formule de Taylor-Young on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!}\epsilon(x - x_0).$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$*. L'ordre du zéro apparaît dans ce cas comme l'ordre de la première dérivée non nulle pour* $x = x_0$*.*

6.4 Développements limités

Définition *Soient* f *une fonction définie sur un voisinage de zéro, sauf peut être en 0, et* $n \in \ N^*$*. On dit que* f *admet un développement limité (D.L) d'ordre* n

au voisinage de zéro, s'il existe polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de degré $\leq n$, à coefficients réels, tel que :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. Le polynôme $P(x)$ est appelé partie principale du développement limité de f et $x^n\varepsilon(x)$ le reste du développement limité .

***Remarque* 6.9.** $f(x) \sim_0 P(x)$

***Exemple* 86.** *: Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Pour $x \neq 1$ on a :*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n\frac{x}{1-x}.$$

Par suite f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)}$$

Théorème *Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

Démonstration *Si f admet deux développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0 \\ f(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq b_k$, alors :

$$0 = (a_k - b_k)x^k + \cdots + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)).$$

Ainsi, pour $x \neq 0$, on a :

$$(a_k - b_k) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0.$$

D'où, si on fait tendre x vers 0, on obtient : $a_k - b_k = 0$. Ce qui est absurde. D'où le résultat.

Théorème *Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x).$$

Démonstration *Il suffit d'appliquer la formule de Mac-Laurin-Young.*

***Remarque* 6.10.** *La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet ; considérons la fonction :*

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^3 \ln|x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) = x\ln|x|$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro.

***Remarque* 6.11.** *Si f est continue en 0 et possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 alors f est dérivable en 0. Par conséquent la fonction $f(x) = |x|$ n'admet pas de développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 car elle est continue et n'est pas dérivable en 0.*

***Remarque* 6.12.** *: Si f possède un développement limité d'ordre ≥ 1 au voisinage de 0 alors f admet une limite finie en 0. Par conséquent toute fonction qui n'admet pas une limite finie en 0 n'admet pas de développement limité au voisinage de 0.*

***Remarque* 6.13.** *Soit f une fonction continue en 0. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si la dérivée première $f'(0)$ existe. Par contre, si f est continue en 0, alors l'existence, au voisinage de 0, d'un développement limité d'ordre $n > 1$, n'entraîne pas l'existence de $f^{(n)}(0)$ ni même l'existence d'autres dérivées que $f'(0)$.*

Propriété *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si f est paire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés pairs. Si f est impaire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés impairs.*

Démonstration *En changeant x en $-x$ dans le développement limité de f, il vient $f(-x) = P(-x)+(-x)^n\epsilon(-x) = P(-x)+(x)^n(-1)^n\epsilon(-x)$. Posons $\epsilon_1(x) = (-1)^n\epsilon(-x)$.*

La fonction $\epsilon_1(x)$ a pour limite 0 au point 0, donc l'égalité

$$f(-x) = P(-x) + (x)^n \epsilon_1(x) \qquad (**)$$

est le développement limité de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ à l'ordre n au point 0. Supposons que la fonction f est paire, c'est à dire que l'on a $f = g$. L'égalité (**) est donc aussi le développement limité de f à l'ordre n au point 0. Puisque ce développement limité est unique, c'est que les polynômes $P(x)$ et $P(-x)$ sont égaux. Par définition, le polynôme P est pair, autrement dit tous les coefficients des monômes de degré impair sont égaux à 0.

***Exercice* 9.** *faites la démonstration dans le cas où f est une fonction impaire.*

6.5 Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young , on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)\\
&a^x = 1 + \frac{lna}{1!}x + \frac{(lna)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(lna)^n}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)\\
&(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)\\
&\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)\\
&\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)\\
&ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)\\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)\\
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x).
\end{aligned}$$

6.6 Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 ;

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x),\\
g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

6.6.1 Développement limité d'une somme

La somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+x^n(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)) = P(x)+Q(x)+x^n\epsilon(x).$$

6.6.2 Développement limité d'un produit

On a :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n[P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)].$$

Donc le produit fg possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en supprimant du polynôme $P(x)Q(x)$ les monômes de degré $> n$.

***Exemple* 87.** *Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de*

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}.$$

Posons : $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \quad et \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^3\epsilon(x).$$

Donc :

$$\frac{\ln(x+1)}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$

***Exemple* 88.** *Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de*

$$f(x) = [\ln(x+1)]^2.$$

On a : $\ln(1+x) = x\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x))\right]$. Donc

$$[\ln(x+1)]^2 = x^2\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x))\right]^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + x^4\epsilon(x).$$

6.6.3 Développement limité d'un quotient

Rappelons le résultat suivant (division des polynômes suivant les puissances croissantes.) Soient A et B des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et soit n un entier naturel. Si $B(0) \neq 0$, il existe un unique polynôme tel que

$$\begin{cases} A - BQ \quad \text{est divisible par } X^{n+1} \\ \qquad Q = 0 \ \text{ ou deg } Q \leq n. \end{cases}$$

Le polynôme Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes. Pour calculer Q, on écrit les polynômes A et B dans l'ordre croissant des puissances de X et l'on pratique la division en s'arrêtant lorsque X^{n+1} est en facteur dans le reste.

Proposition 6.1. *Soient f et g des fonctions ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ et } g(x) = B(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Si le nombre $g(0) \neq B(0)$ est non nul, le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

Démonstration *Ecrivons $A - BQ = X^{n+1}R$ où R est un polynôme. En notant $f(x) = A(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n\varepsilon_2(x)$, il vient*

$$\begin{aligned} f(x) - g(x)Q(x) &= A(x) - B(x)Q(x) + x^n\varepsilon_1(x) - x^nQ(x)\varepsilon_2(x) \\ &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - x^nQ(x)\varepsilon_2(x) \\ &= x^n\left(xR(x) + \varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x)\right). \end{aligned}$$

En divisant par $g(x)$, on obtient $\frac{f(x)}{g(x)} - Q(x) = x^n\varepsilon_3(x)$ où la fonction

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{g(x)}\left(xR(x) + \varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x)\right)$$

tend vers 0 d'après les théorèmes sur les limites. Puisque Q est un polynôme nul ou de degré inférieur ou égal à n, l'égalité $\dfrac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\varepsilon_3(x)$ est le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0.

***Exemple* 89.** *Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de*

$$h(x) = \frac{ln(x+1)}{1-x}.$$

Utilisons cette fois-ci la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{c|c}
x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} & 1-x \\
-x+x^2 & \hline x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6} \\
\hline \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} & \\
-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2} & \\
\hline \frac{5x^3}{6} &
\end{array}$$

On retrouve alors le résultat précédent.

***Exemple* 90.** *Déterminons le développement limité à l'ordre* 5 *au voisinage de* 0 *de la fonction :*

$$\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Au voisinage de 0*, les développements limités de* $\sin(x)$ *et de* $\cos(x)$ *à l'ordre* 5 *s'écrivent :*

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^5\epsilon(x) \quad et \quad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^5\epsilon(x)$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne.

$$\begin{array}{c|c}
x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\
-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{24}x^5 & \hline x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\
\hline \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5 & \\
-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^5 & \\
\hline \frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

D'où

$$\boxed{\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+x^6\epsilon(x).}$$

6.6.4 Développement limité d'une composée

Si $g(0)=0$ *alors, la fonction composée,* $f\circ g$ *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* 0 *obtenu en ne conservant que les monômes de degré* $\leq n$ *dans le* *polynôme $P \circ Q$. En effet :*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= a_0 + a_1[g(x)] + \cdots + a_n[g(x)]^n + [g(x)]^n \varepsilon_1([g(x)]) \\ g(x) &= x(b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)).\end{aligned}$$

***Exemple* 91.** *Calculer le développement limité , à l'ordre 3 au voisinage de 0, de*

$$h(x) = \sqrt{1 + ln(1 + x)}.$$

On a : $h(x) = (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = ln(1 + x)$ et $g(0) = 0$. On sait que

$$\begin{aligned}ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x) \\ \sqrt{1 + x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3 \epsilon(x)\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}h(x) &= \sqrt{1 + ln(1 + x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}[g(x)] - \frac{1}{8}[g(x)]^2 + \frac{1}{16}[g(x)]^3 + x^3 \epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{8}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]^2 + \frac{x^3}{16} + x^3 \epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3 \epsilon(x).\end{aligned}$$

***Remarque* 6.14.** *Si $g(0) = b_0 \neq 0$ on pose $g_1(x) = b_0 - g(x)$ et $f_1(x) = f(b_0 - x)$ on obtient $f_1 \circ g_1(x) = f \circ g(x)$ et $g_1(0) = 0$, il suffit alors de calculer le développement limité de $f_1 \circ g_1$.*

6.6.5 Intégration d'un développement limité :

Théorème 6.1. *Si f est dérivable sur un voisinage de zéro, et si f' admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre n de partie régulière p(x). Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre $n + 1$ au voisinage de zéro de partie régulière :*

$$f(0) + \int_0^x p(t)dt.$$

Démonstration *Nous avons*

$$f'(x) = p(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Posons $\phi(x) = f'(x) - p(x) = x^n\varepsilon(x)$. *La fonction* ϕ *est continue, elle admet des primitives. Soit*

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x p(t)dt.$$

La fonction φ *est dérivable au voisinage de* 0 *et d'après le théorème des Accroissements Finis il existe* θ *dans* $]0,1[$, *tel que :*

$$\varphi(x) = x\varphi'(\theta x) = x\phi(\theta x) = x^{n+1}\varepsilon(\theta x) = x^{n+1}\varepsilon_1(x).$$

Soit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x p(t)dt + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

♦

***Exemple* 92.** *: On a :*

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x).$$

Ainsi, le développement limité au voisinage de 0 *d'ordre* $2n+1$ *de* $arctgx$ *est :*

$$\boxed{arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x).}$$

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

6.6.6 Dérivation d'un développement limité

Corollaire 6.1. *Si* f *est dérivable en* 0 *et* f' *admet un développement limité d'ordre* $n-1$ *au voisinage de* 0, *alors :*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x).$$

***Remarques* 6.1.**

1. *Toujours développer toutes les fonctions au même ordre.*
2. *Lorsque vous calculez un développement limité, disposez clairement les calculs de manière à ne pas oublier de termes lorsque vous ferez des sommes, des composées ou des divisions selon les puissances croissantes. Chacune de ces opérations est simple, mais il peut y en avoir plusieurs à effectuer.*
3. *N'écrivez pas les monômes de degré trop grand dont on sait d'après les théorèmes qu'ils n'interviendront pas dans le résultat final.*

La notion du développement limité au voisinage de 0 *s'étend au voisinage d'un point* $x_0 \in R$ *quelconque en posant* $u = x - x_0$.

Définition *Soient* f *une fonction définie sur un voisinage d'un point* $x_0 \in R$ *, sauf peut-être en* x_0 *et* $n \in N^*$. *On dit que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* x_0 *si :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

où $a_i, \ \ 0 \leq 1 \leq n$, *sont des nombres réels et* $\varepsilon(x)$ *une fonction tendant vers* 0 *quand* x *tend vers* x_0.

***Remarque* 6.15.** *Si on effectue le changement de variable* $u = x - x_0$, *dans la définition* 4.5.1, *on obtient*

$$f(x) = f(u + x_0) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n + o(u^n),$$

donc le développement limité de f *au voisinage de* x_0 *se ramène au développement limité de* $g(u) = f(u + x_0)$ *au voisinage de* 0.

***Exemple* 93.** *Calculer le développement limité au voisinage de* 1 *d'ordre* n *de* $f(x) = e^x$. *On pose* $u = x - 1$ *et* $g(u) = f(u + 1)$ *on obtient*

$$g(u) = e^{u+1} = ee^u = e\left[1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + u^n \epsilon(u)\right],$$

donc le développement limité de e^x *au voisinage de* 1 *est :*

$$e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)^n + (x-1)^n \epsilon(x-1)\right].$$

***Exemple* 94.** *Calculer le développement limité au voisinage de* 2 *d'ordre* 3 *de* $f(x) = \sqrt{x}$. *On pose* $u = x - 2$ *et* $g(u) = f(u + 2)$ *on obtient :*

$$g(u) = \sqrt{u+2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u}{2} + 1} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}u - \frac{1}{32}u^2 - \frac{1}{128}u^3 \varepsilon(u)\right],$$

donc le développement limité de $\sqrt{x}$ *au voisinage de* 2 *à l'ordre* 3 *est :*

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{32}(x-2)^2 - \frac{1}{128}(x-2)^3 + (x-2)^3\epsilon(x-2)\right].$$

6.6.7 Développements limités au voisinage de l'infini

Si f *est définie sur un intervalle de la forme* $[a, +\infty[$ *(ou bien de la forme* $]-\infty, a]$*), on se ramène au voisinage de* 0 *en posant* $u = \dfrac{1}{x}$. *Ainsi, on dira que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de l'infini si la fonction* $g(u) = f(\dfrac{1}{u})$ *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre* n *au voisinage de* ∞ *est donné par*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}),$$

$\varepsilon(\dfrac{1}{x})$ *tendant vers 0 quand* x *tend vers l'infinie.*

***Exemple* 95.** *Calculer le développement limité d'ordre* 3 *au voisinage de* ∞ *de*

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

On pose $u = \dfrac{1}{x}$ *et* $g(u) = f(\dfrac{1}{u})$, *on se ramène alors au calcul du développement limité de* $g(u)$ *au voisinage de* 0. *On a*

$$g(u) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u).$$

Par suite donc le développement limité de $f(x)$ *au voisinage de* ∞ *est*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

6.7 Développements limités généralisés

Soit f *une fonction définie dans un voisinage de zéro, sauf peut-être en* 0. *Si* f *n'admet pas de limite finie en* 0 *elle ne peut avoir de développement limité au voisinage de* 0. *Mais il peut exister un entier naturel* m *tel que la fonction* $g(x) = x^m f(x)$ *tende vers une limite finie quand* $x \to 0$ *et admette un développement limité au voisinage de* 0 :

$$x^m f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

dans ce cas on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^m}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + x^{n-m}\varepsilon(x).$$

Cette dernière expression s'appelle développement limité généralisé de f au voisinage de 0 d'ordre $n-m$.

***Exemple* 96.** *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$, n'admet pas de limite finie en 0, donc elle n'admet pas de développement limité au voisinage de 0. Mais $xf(x) = \dfrac{1}{1-x}$ possède un développement limité au voisinage de 0. Par exemple à l'ordre 3 on a*

$$xf(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x),$$

d'où le développement limité généralisé de f au voisinage de 0 d'ordre 2 est

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^2\epsilon(x).$$

6.8 Applications des développements limités

6.8.1 Calculs des limites

Lorsqu'on veut calculer une limite et que les théorèmes généraux ne s'appliquent pas parce qu'on a affaire à une forme indéterminée, un développement limité permet généralement de trouver la réponse. Présentons cette technique essentielle sous forme d'exemples et d'exercices.

***Exemple* 97.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^2(e^x-1)}$. On a* $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$, $e^x = 1 + x + x\epsilon(x)$. *Donc* $f(x) \sim_0 \dfrac{-x^3}{6x^3}$, *par suite* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{6}$.

***Exemple* 98.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. On a*

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{(x\sin x)^2} \quad &\sim_0 \quad \frac{x^2 - [x - \frac{x^3}{6}]^2}{(x\sin x)^2} \\ &\sim_0 \quad \frac{x^2 - [x^2 - \frac{x^4}{3}]}{(x\sin x)^2} \\ &\sim_0 \quad \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

***Exemple* 99.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $\dfrac{arctg(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)}$. On a $arctg(x)-x=\dfrac{-x^3}{3}+x^3\epsilon_1(x)$, et $sin(x)-xcos(x)=(x-\dfrac{x^3}{6})-x(1-\dfrac{x^2}{2})+x^3\epsilon_2(x)$. On en déduit*

$$\frac{arctg(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)}\to -1 \ \textit{lorsque}\ x\to 0.$$

Rappelons que pour étudier une forme indéterminée $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour $x\to a$, on se ramènera au cas $a=0$ en posant $x=a+u$, et en étudiant pour $u\to 0$ la quantité $\dfrac{f(a+u)}{g(a+u)}$. Quand on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on se ramènera encore à une étude au voisinage de 0, en posant $x=\dfrac{1}{u}$, et en étudiant $\dfrac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})}$ pour $u\to 0$, et $u>0$.

***Exemple* 100.** *Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers $+\infty$ de*

$$x\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}.$$

En utilisant la formule $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+u\epsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\epsilon(u)=0$, on a :

$$(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right).$$

De même :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)-1\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_2(x)=0$. On en déduit :

$$x\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}=x\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)}=\frac{\frac{1}{6}+\epsilon_1(x)}{\frac{1}{3}+\epsilon_2(x)}.$$

Ce qui montre que la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$.

***Exemple* 101.** *Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de*

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

C'est une forme indéterminée de la forme 1^∞. On écrit

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}.$$

On est ramené à l'étude de $\frac{1}{x^2}ln(cos(x))$ *pour* $x \to 0$. *C'est une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$. *Effectuons un développement limité à l'ordre* 2 *de* $ln(cos(x))$ *(pour* $x \to 0$*).*

$$\left\{\begin{array}{rl} \ln(1+u) = & u + u\epsilon_1(u) \\ u = \cos(x) - 1 = & -x^2 + x\epsilon_2(x) \end{array}\right.$$

où $\lim_{x\to+\infty} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \epsilon_2(x) = 0$. *En composant les développements limités , on obtient :*

$$\ln(\cos(x)) = \left(\frac{-x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x)\right) + x^2\left(\frac{-1}{2} + \epsilon_2(x)\right) = \frac{-x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)$$

où $\lim_{x\to+\infty} \epsilon_3(x) = 0$. *D'où :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}ln(cos(x)) = -\frac{1}{2} \quad et \quad \lim_{x\to 0}(cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

***Exemple* 102.** *Calculer* $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln chx}{1+x\sqrt{1+x}-e^{\sin x}}$. *Le numérateur et le dénominateur tendent vers* 0, *il convient donc de chercher leur développement limité à un ordre suffisant pour que les fonctions polynômes obtenues ne soient pas nulles. Le développement limité de* $\sqrt{1+x}$ *à l'ordre* 2 *au point* 0 *est*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Le développement limité de $\sin x$ *au point* 0 *et à l'ordre* 3 *est* $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$ *et celui de la fonction exponentielle est* $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$. *En composant ces développements limités, nous obtenons :*

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Notons $D(x) = 1+x\sqrt{1+x}-e^{\sin x}$ *le dénominateur de l'expression ; il vient le développement limité à l'ordre* 3 *:*

$$D(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3\right) - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + x^3\epsilon(x).$$

$$= -\frac{1}{8}x^3 + x^3\epsilon(x).$$

Le premier terme non nul de la partie polynôme étant de degré 3, *calculons également à l'ordre* 3 *le développement limité du numérateur. Pour cela il suffit de calculer le développement limité à l'ordre* 2 *de* $\ln chx$. *Nous connaissons les développements limités à l'ordre* 2 *:*

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x) \quad et \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

En composant ces développement limités, ce qui est possible car $ch(0)-1=0$*, on trouve*

$$\ln chx = \ln(1+(chx-1)) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)$$

où $\lim_{x\to 0}\epsilon_1(x)=0$*. Nous avons alors*

$$\frac{x\ln chx}{D(x)} = \frac{x^3(\frac{1}{2}+\epsilon_1(x))}{x^3(\frac{-1}{8})+\epsilon(x)} = \frac{\frac{1}{2}+\epsilon_1(x)}{\frac{-1}{8})+\epsilon(x)}.$$

Dans la dernière expression, le numérateur tend vers $\frac{1}{2}$ *quand* x *tend vers* 0 *et le dénominateur tend vers* $\frac{-1}{8}$*, donc la limite cherchée est égale à* -4*.*

***Exercice* 10.** *Calculer la limite de* $f(x)=\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ *quand* x *tend vers* $+\infty$*.*

---

corrigé

Posons

$$g(x) = f(\frac{1}{x}) = \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$$

et cherchons la limite de $g(x)$ *quand* x *tend vers* 0*. Quand* x *tend vers* 0*,* $\dfrac{2^x+3^x}{2}$ *tend vers* $\dfrac{2^0+3^0}{2}=1$ *et l'exposant* $\dfrac{1}{x}$ *tend vers l'infini. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Rappelons que si* a *est un nombre réel positif, on a par définition* $a^x=e^{x\ln a}$ *pour tout* x*. Nous avons donc pour tout* x

$$2^x = e^{(x\ln 2)} \quad et \quad 3^x = e^{(x\ln 3)}.$$

Pour calculer la limite de $g(x)$*, prenons le logarithme*

$$\ln g(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{2^x+3^x}{2}) = \frac{1}{x}\ln(h(x)).$$

où $h(x)=\frac{2^x+3^x}{2}$*.Ecrivons le développement limité de la fonction* h *à l'ordre* 1 *au point* 0*, on a*

$$e^{(x\ln 2)} = 1 + x\ln 2 + x\epsilon(x)$$
$$e^{(x\ln 3)} = 1 + x\ln 3 + x\epsilon(x)$$

donc il vient

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(e^{(x\ln 2)}+e^{(x\ln 3)}\right) = 1 + \frac{\ln 2+\ln 3}{2}x + x\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{\ln 6}{2} + x\epsilon(x) = 1 + (\ln\sqrt{6})x + x\epsilon(x).$$

Puisque nous connaissons le développement limité de $\ln(x+1)$ *au point* 0*, écrivons*

$$\ln h(x) = \ln(1 + (h(x) - 1)) = \ln(1 + u(x))$$

où $u(x) = h(x) - 1$ *a pour limite* 0 *quand* x *tend vers* 0*. Or* $\ln(x+1) = x + x\epsilon(x)$ *et* $u(x) = (\ln\sqrt{6})x + x\epsilon(x)$*. En composant ces développements limités, on obtient*

$$\ln h(x) = \ln(1 + u(x)) = (\ln\sqrt{6})x + x\epsilon(x).$$

Il vient $\ln g(x) = \dfrac{1}{x}\ln h(x) = \ln\sqrt{6} + \epsilon(x)$ *c'est à dire* $\lim\limits_{x\to 0}\ln g(x) = \ln\sqrt{6}$*. En composant avec la fonction exponentielle qui est continue sur* $\mathbb{R}$*, nous obtenons enfin*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{(\ln g(x))} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

***Exercice* 11.** *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}.$$

Où les réels a *et* b *vérifient :* $0 < a < b$*.*

***Exercice* 12.** *Calculer la limite de la suite de terme général* $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$*.*

---

corrigé

La limite se présente sous la forme indéterminée 1^∞*. En prenant le logarithme, on obtient la suite de terme général* $\ln u_n = n^2 \ln\cos\dfrac{1}{n}$ *dont nous allons calculer la limite. Le développement limité de* $\cos x - 1$ *à l'ordre* 2 *au point* 0 *est* $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ *et celui de* $\ln(1+x)$ *est* $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$*. Nous pouvons composer ces développements limités, ce qui donne*

$$\ln\cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$*. Remplaçons* x *par* $\dfrac{1}{n}$ *dans cette égalité et posons* $\varepsilon_n = \varepsilon(\frac{1}{n})$*. Nous obtenons*

$$\ln\cos\frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n.$$

Puisque n *tend vers* $+\infty$*, la suite* $\frac{1}{n}$ *a pour limite* 0*, donc (propriété de la fonction* ε*) la suite* ε_n *a pour limite* 0*. En passant à la limite, on obtient* $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n = \dfrac{1}{2}$*. Puisque la fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$*, il vient*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

6.8.2 Calcul des dérivées n^{iemes} en un point :

Pour une fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^n$, pour un certain entier $n \geq 1$, admet un développement limité à l'ordre n au point a qui s'écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x).$$

Si l'on peut calculer ce développement limité , alors on déduit les valeurs des dérivées $f'(a), f"(a) \cdots f^{(n)}(a)$.

***Exemple* 103.** *Calculer la valeur en 0 des quatres premières dérivées de $\dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$.*
Posons $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$ et cherchons le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0. Puisque le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au point 0 est $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x)$, nous devons calculer le quotient à l'ordre 4 de la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ par $1 + x + x^2$. On trouve ainsi

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + x^4\epsilon(x).$$

La fonction f est classe $\mathcal{C}^4$, par conséquent le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 est aussi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + (x-a)^4\epsilon(x).$$

D'après l'unicité du développement limité , on déduit des égalités ci dessus que :

$$f(0) = 1, \frac{f'(0)}{1!} = -1, \frac{f"(0)}{2!} = -\frac{1}{2}, \frac{f"'(0)}{3!} = \frac{3}{2}, \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{23}{24}.$$

On a donc $f'(0) = -1, f"(0) = -1, f^{(3)}(0) = 9, f^{(4)}(0) = -23$.

6.8.3 Calcul des coefficients d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Lorsque on décompose en éléments simple une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$, on se retrouve face au problème de calcul des coefficients réels de cette décomposition. Plusieurs techniques ont été étudiées et appliquées en algèbre. Ici on va voir comment les développements limités permettent de trouver ces constantes pour quelques fractions particulières. Illustrons ce propos sous forme d'exemples et d'exercices.

***Exercice* 13.** *Décomposons la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{-5X^3 + 2X^2 - 8}{X^3(X-1)}$ sur $\mathbb{R}$.*

corrigé

Le théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$ *permet d'écrire*

$$F(X) = \frac{A_1}{X^3} + \frac{A_2}{X^2} + \frac{A_3}{X} + \frac{A_4}{X-1}.$$

Où les quatres coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 *sont inconnues et à trouver. On peut appliquer les techniques appris en algèbre pour calculer ces coefficients, mais regardons de près ce qui ce passe quand on multiplie* F *par* X^3.

$$X^3F(X) = \frac{-5X^3 + 2X^2 - 8}{X-1} = A_1 + A_2X + A_3X^2 + X^2 \times XF_15X),$$

où la fraction $F_1(X) = \frac{A_4}{X-1}$ *est définie au voisinage de* 0. *Cette dernière égalité est donc le développement limité à l'ordre* 2 *au voisinage de zéro de*

$$\frac{-5X^3 + 2X^2 - 8}{X-1} = \frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X+1}.$$

Donc on calcul les trois coefficients A_1, A_2 *et* A_3 *en effectuant un développement limité de* $X^3F(X)$ *en* 0 *à l'ordre* 2, *grâce à l'unicité du développement limité . On a*

$$\frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X+1} = (8 - 2x^2)(1 + X + X^2) + X^2\epsilon(X),$$

avec $\epsilon(X)$ *tend vers* 0 *quand* X *tend vers* 0. *D'où*

$$\frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X+1} = 8 + 8X + 6X^2 + X^2\epsilon(X),$$

donc $A_1 = 8$ $A_2 = 8$ *et* $A_3 = 6$. *Par suite*

$$F(X) = \frac{8}{X^3} + \frac{8}{X^2} + \frac{6}{X} + \frac{-11}{X-1}.$$

Le dernier coefficient A_4 *est obtenu par les méthodes habituelles.*

***Exercice* 14.** *Soit la fraction rationnelle*

$$F = \frac{(X^2 - X + 1)^2}{X^3(X-1)^3}.$$

1. *Comparer* $F(X)$ *et* $F(1-X)$. *En déduire des relation entre les coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de* F.
2. *Donner le développement limité à l'ordre* 2, *au voisinage de zéro, de la fonction*

$$g(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{(X-1)^3}.$$

3. *En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle* F.

---

corrigé

1. *La fraction admet* 0 *et* 1 *comme pôle triples. Sa décomposition en éléments simples est de la forme (voir cours d'algèbre pour plus de précisions).*

$$F(X) = \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{a_3}{X^3} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2} + \frac{b_3}{(X-1)^3}.$$

De cette écriture on déduit la relation $F(1-X) = F(X)$ *et l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle permet d'affirmer que :*

$$b_1 = -a_1; \quad b_2 = a_2; \quad b_3 = -a_3.$$

2. *On a*

$$g(x) = -(1-2x+3x^2-2x^3+x^4)(1-x)^{-3} = -(1-2x+3x^2+x^2\epsilon(x))(1+3x+6x+x^2\epsilon(x)).$$

Soit

$$g(x) = -1 - x - 3x^2 + x^2\epsilon(x).$$

3. *On a* $g(x) = x^3F(x)$, *donc*

$$g(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3 + b_1\frac{x^3}{x-1} + b_2\frac{x^3}{(x-1)^2} + b_3\frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

Le développement limité de la fonction g *à l'ordre deux en zéro s'écrit sous la forme*

$$g(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

De l'unicité du développement limité d'une fonction en un point, on déduit que

$$-3 = a_1; \quad -1 = a_2; \quad -1 = a_3.$$

Enfin les considérations de la question 1 *donnent*

$$b_1 = 3; \quad b_2 = -1; \quad b_3 = 1.$$

Finalement

$$F(X) = \frac{-3}{X} + \frac{-1}{X^2} + \frac{-1}{X^3} + \frac{3}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}.$$

***Exercice* 15.** 1. *Déterminer le développement limité à l'ordre* 5 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{x^4+x^3+1}{(1+x^2)^2}$.

2. *le but de cette question est d'utiliser le résultat précédent pour déterminer la*

décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ *de la fraction rationnelle*

$$F = \frac{X^4 + X^3 + 1}{X^6(1+x^2)^2}.$$

a) *Préciser la forme de la décomposition de* F.

b) *De la forme précédente déduire un développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x^6F(x)$. *En déduire certains coefficients de la décomposition recherchée.*

c) *Achever le calcul de la décomposition.*

---

corrigé

1.

$$\frac{x^4 + x^3 + 1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + x^3 + 4x^4 - 2x^5 + x^5\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x)$ *tend vers zéro quand* x *tend vers zéro.*

a)

$$F = \frac{a}{X^6} + \frac{b}{X^5} + \frac{c}{X^4} + \frac{d}{X^3} + \frac{e}{X^2} + \frac{f}{X} + \frac{gX+h}{X^2+1} + \frac{kX+l}{(X^2+1})^2,$$

les coefficients de la décomposition étant des réels.

b)

$$x^6F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + x^5\epsilon(x),$$

en déduit $a = 1, b = 0, c = -2, d = 1, e = 4, f - 2.$

c)

$$F = \frac{1}{X^6} - \frac{2}{X^4} + \frac{1}{X^3} + \frac{4}{X^2} - \frac{2}{X} + \frac{2X-4}{X^2+1} + \frac{2X-4}{(X^2+1})^2.$$

7

Courbes Paramétrées

7.1 Définition

Soient f et g deux applications définies sur le même sous ensemble I de $\mathbb{R}$. Le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$ décrit un sous ensemble (C) du plan lorsque t décrit I. (C) est une courbe du plan. L'application $M \ : \ t \to M(t)$ de I sur (C) est un paramétrage de la courbe (C) et les équations

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

définissent une représentation paramétrique de (C).

7.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

7.2.1 Domaine de définition et dérivabilité

Le domaine de définition, noté D, sera l'intersection des domaines de définition de x et y, notés D_x et D_y respectivement. Cela définit une courbe uniquement si D est un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

7.2.2 Réduction du domaine d'étude

Pour réduire le domaine d'étude on va étudier la périodicité de la courbe paramétrée, regarder s'il existe une isométrie qui caractérise cette courbe.

Périodicité : *Soient les fonctions périodiques x et y admettant une période commune. Notons T, cette période commune positive la plus petite de x et y, on a alors $\forall t \in D$:*

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$$

Pour $t \in [a, a+T[$, la courbe est entièrement décrite ($a \in \mathbb{R}$ fixé).

Isométries : *Les courbes paramétrées sont souvent invariantes par certaines isométries du plan.*
Ainsi on a :
- Symétrie par rapport à l'origine : $S(x,y) = (-x,-y)$
- Symétrie par rapport à l'axe des ordonnés : $S(x,y) = (-x,y)$
- Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $S(x,y) = (x,-y)$
- Symétrie par rapport à la droite $y = x$: $S(x,y) = (y,x)$
- Symétrie par rapport à la droite $y = -x$: $S(x,y) = (y,x)$
- Symétrie par rapport à l'origine : $S(x,y) = (-y,-x)$
- Rotation d'angle $\frac{\Pi}{2}$ et de centre θ : $S(x,y) = (-y,x)$
- Rotation d'angle $\frac{-\Pi}{2}$ et de centre θ : $S(x,y) = (y,-x)$
Plus généralement $S(x,y) = (a-x, b-y)$ est la symétrie par rapport au point $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

7.2.3 Étude des variations de x et y

On construit ensuite un tableau de variations pour avoir une idée de l'allure de la courbe (C). On obtient ainsi un tableau comme ci-dessous :

t	*Domainede*
x'	*Signe : + ou -*
x	$\nearrow$ *ou* $\searrow$
$y'(t)$	*Signe : + ou -*
$y(t)$	$\nearrow$ *ou* $\searrow$
C	$\nearrow$ *ou* $\searrow$ *ou* $\swarrow$ *ou* $\nwarrow$

Explication des variations de C :

t				
x	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
C	$\nearrow$	$\searrow$	$\nwarrow$	$\swarrow$

7.2.4 Étude des branches infinies

Les branches infinies correspondent au comportement de la courbe lorsqu'elle tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers un t_0 fini ou non.
On a alors plusieurs cas possibles :

Asymptote horizontale :

Quand x tend vers ∞ et y tend vers y_0 lorsque t tend vers t_0, alors on a une asymptote horizontale.
La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - y_0$.
Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.
Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote.
L'équation de l'asymptote est alors $y = y_0$

Asymptote verticale :

Quand x tend vers x_0 et y tend vers ∞ lorsque t tend vers t_0, alors on a une asymptote verticale.
La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $x(t) - x_0$.
Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.
Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote.
L'équation de l'asymptote est alors $x = x_0$.

Asymptote oblique :

Quand x tend vers ∞ et y tend vers ∞ lorsque t tend vers t_0 alors on a une asymptote oblique.
Si $\frac{y(t)}{x(t)}$ possède une limite finie non nulle a et $y(t) - ax(t)$ possède une limite finie b alors la courbe admet la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique. La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote dépend du signe de $y(t) - ax(t) - b$.
Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.
Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote.

S'il n'existe pas d'asymptote alors on peut avoir :

Direction asymptotique :

Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 alors on a une direction asymptotique dans la direction O_x.

Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers ∞ alors on a une direction asymptotique dans la direction O_y.

Courbe asymptotique :

Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers a, $a = \tan\theta$ et $y - ax$ n'a pas de limite lorsque t tend vers t_0, alors on a une courbe asymptotique d'angle θ.

Branche parabolique :

Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers a, $a = \tan\theta$ et $y - ax$ tend vers ∞ tend vers t_0, alors la courbe (C) admet une branche parabolique d'angle θ.

7.2.5 Étude des points particuliers

Il existe plusieurs types de points particuliers :

– Les points qui sont situés à l'intersection de la courbe et de l'axe O_x ou O_y.

Pour les trouver on cherche les valeurs de t qui annulent x ou y.

- *Les points qui sont situés à l'intersection de la courbe et d'une asymptote.*
  On cherche les points qui annulent l'asymptote. Par exemple si on a $y = ax + b$, on cherche les points qui annulent $y - ax - b$.
- *Les point stationnaires de la courbe.*
  Pour cela on cherche les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.
- *Les points multiples de la courbe.*
  Ce sont les points où la courbe se recoupe. Par exemple pour la recherche de points doubles, on cherche t_1 et t_2 tels que

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

Il est généralement difficile voire infaisable de calculer les points multiples. Il est plus facile de procéder par étude graphique. Pour cela nous allons continuer l'étude.

7.2.6 Étude de la convexité

Nous allons étudier la convexité de la courbe. Pour cela nous avons besoin de calculer le vecteur vitesse :

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

et le vitesse accélération :

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}$$

Si ces deux vecteurs forment un repère direct alors la courbe est convexe, sinon elle est concave.
Cependant si on parcourt la courbe de droite à gauche et non de gauche à droite, elle devient concave pour un repère direct et convexe pour un repère indirect.
Pour savoir si on a un repère direct ou indirect on calcule le déterminant de :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$$

Si le déterminant est strictement supérieur à zéro, alors la courbe est convexe, s'il est strictement inférieur à zéro, alors la courbe est concave et si le déterminant est nul, alors on devrait avoir un point d'inflexion.

7.2.7 Traçage de la courbe

On commence par placer sur le dessin les points à tangentes verticales ou horizontales. Ensuite les points singuliers (avec leurs tangentes), les points particuliers obtenus et les branches infinies. On joint ensuite les points à l'aide du tableau de variation.

7.3 Exemple

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Domaine de définition et dérivabilité :

Les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des sommes et composées de fonctions polynomiales $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Elles sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Réduction du domaine d'étude :

En posant $t = \frac{-1}{t'}$, on obtient une nouvelle paramétrisation de la même courbe.

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{-1}{t'}\right) = \dfrac{-1}{t'} + t'^2 = y(t') \\ y\left(\dfrac{-1}{t'}\right) = \dfrac{1}{t'^2} + t' = x(t') \end{cases}$$

Comme $tt' = -1$, le point

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

est le symétrique du point

$$\begin{bmatrix} x(t') \\ y(t') \end{bmatrix}$$

par rapport à la première bissectrice.

Donc la courbe admet la première bissectrice comme axe de symétrie.

Étude des variations de x et y :

On a :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^3} & \textit{qui s'annule pour } t = \sqrt[3]{2} \\ y'(t) = 2t + \dfrac{1}{t^2} & \textit{qui s'annule pour } t = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

Étude des branches infinies :

La courbe admet des branches infinies lorsque t tend vers $\pm\infty$ et lorsque t tend vers 0_- et 0_+.
Regardons la limite en $+\infty$ de $\frac{y(t)}{x(t)}$: $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \sim \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{t} = +\infty$

Or $x(t)$ n'a pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$. On en déduit que la courbe admet une branche parabolique pour $t \longrightarrow +\infty$

Quand t tend vers $+\infty$, $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{-1}{t} \simeq 0$. On regarde donc la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

L'allure de la courbe est proche de celle d'une parabole.
De même quand t est très petit on obtient une parabole couchée.

7.3.1 Une étude complète

Exemple *Construire la courbe*

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}.$$

Solution. *On note $\mathcal{C}$ la courbe à construire.*

- ***Domaine d'étude.***
  Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ est défini si et seulement si $t \neq \pm 1$. Aucune réduction intéressante du domaine n'apparait clairement et on étudie donc sur $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

– ***Variations conjointes des coordonnées.***
La fonction x est dérivable sur D et, pour $t \in D$,

$$x'(t) = \frac{3t^2(t^2-1) - t^3(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}.$$

La fonction x est donc strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\sqrt{3}[$.

La fonction y est dérivable sur $D \cup \{-1\}$ et, pour $t \in D \cup \{-1\}$,

$$y'(t) = \frac{(6t-2)(t-1) - (3t^2-2t)}{3(t-1)^2} = \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2}.$$

La fonction y est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et sur $[1+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, strictement décroissante sur $[1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$ et sur $]1, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Les fonctions x' et y' ne s'annulent jamais simultanément et la courbe est donc régulięre. La tangente en un point $M(t)$ est dirigée par le vecteur dérivé $\left(\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}, \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2}\right)$ ou encore par le vecteur $\left(\frac{3t^2(t^2-3)}{(t+1)^2}, 3t^2-6t+2\right)$.

– ***Tangentes parallÃ¨les aux axes.***
y' s'annule en $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$. En les points $M(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $M(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$, la courbe admet une tangente parallÃ¨le Ã (Ox). On a

$$x\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 / \left(\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right) = \left(1-\tfrac{3}{\sqrt{3}}+\tfrac{3}{3}-\tfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) / \left(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}+\tfrac{1}{3}\right) = \frac{6\sqrt{3}-10}{-6+\sqrt{3}}$$
$$= \tfrac{1}{33}\left(6\sqrt{3}-10\right)\left(-6-\sqrt{3}\right) = \frac{42-26\sqrt{3}}{33} = -0,09\ldots,$$

et de meme,

$$y\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3}-2\right) / \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = 0,17\ldots$$

Puis, par un calcul conjugué (c'est-à -dire en remplacant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$ au début de calcul), on a $x(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{42+26\sqrt{3}}{33} = 2,63\ldots$ et $y(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} = 2,48\ldots$

x' s'annule en 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. En les points $M(0) = (0,0)$, $M(\sqrt{3}) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+7\sqrt{3}}{6}) = (2,59\ldots, 2,52\ldots)$ et $M(-\sqrt{3}) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-7\sqrt{3}}{6}) = (-2,59\ldots, -1,52\ldots)$, il y a une tangente parallÃ¨le Ã (Oy).

– ***Étude en l'infini.***
Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes deux vers $+\infty$ et il y a donc une branche infinie. Meme chose quand t tend vers $-\infty$.

Étudions $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$. *Pour* $t \in D\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{t(3t-2)}{3(t-1)}\times\frac{t^2-1}{t^3}=\frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}.$$

Cette expression tend vers 1 *quand* t *tend vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$.
Pour $t\in D$,

$$y(t)-x(t)=\frac{t(3t-2)}{3(t-1)}-\frac{t^3}{t^2-1}=\frac{t(3t-2)(t+1)-3t^3}{3(t-1)(t+1)}=\frac{t^2-2t}{3(t-1)(t+1)}.$$

Cette expression tend vers $\frac{1}{3}$ *quand* t *tend vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$. *Ainsi,*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(y(t)-(x(t)+\tfrac{1}{3})\right)=0.$$

Quand t *tend vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$, *la droite* Δ *d'équation* $y=x+\frac{1}{3}$ *est donc asymptote Ã la courbe.*
Étudions la position relative de $\mathcal{C}$ *et* Δ. *Pour* $t\in D$, $y(t)-\left(x(t)+\frac{1}{3}\right)=\frac{t^2-2t}{3(t-1)(t+1)}-\frac{1}{3}=\frac{-2t+1}{3(t-1)(t+1)}$.

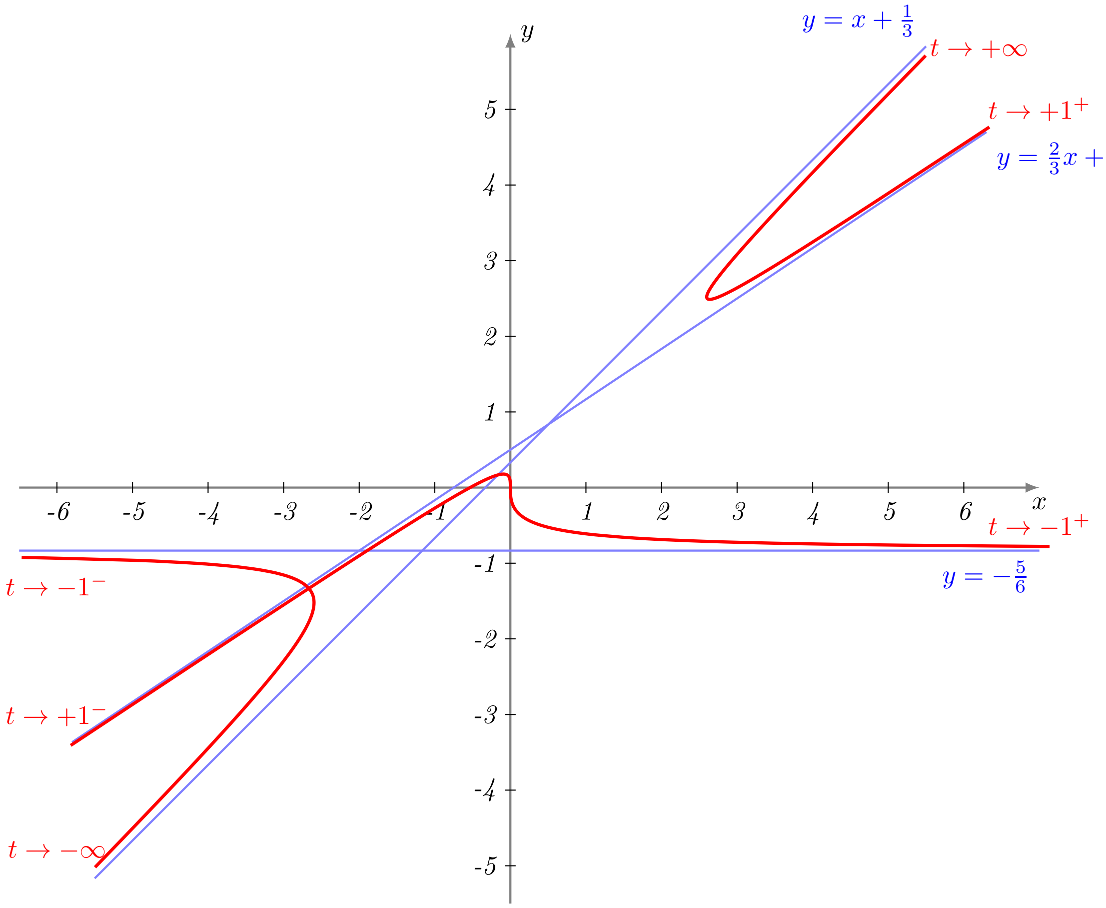
t	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
signe de $y(t)-(x(t)+\frac{1}{3})$	$+$	$-$	$+$	$-$	
position relative	$\mathcal{C}$ *au-dessus de* Δ	$\mathcal{C}$ *en-dessous de* Δ	$\mathcal{C}$ *au-dessus de* Δ	$\mathcal{C}$ *en-dessous de* Δ	

$\mathcal{C}$ *et* Δ *se coupent au point* $M(1/2)=(-1/6,1/6)=(-0,16\ldots,0,16\ldots)$.

- ***Étude en*** $t=-1$.
  Quand t *tend vers* -1, $y(t)$ *tend vers* $-5/6$, *et* $x(t)$ *tend vers* $-\infty$ *en* -1^- *et vers* $+\infty$ *en* -1^+. *La droite d'équation* $y=-\frac{5}{6}$ *est asymptote à* $\mathcal{C}$. *La position relative est fournie par le signe de* $y(t)+\frac{5}{6}=\frac{6t^2+t-5}{6(t-1)}=\frac{(t+1)(6t-5)}{6(t-1)}$.
- ***Étude en*** $t=1$.
  Quand t *tend vers* 1, x *et* y *tendent vers l'infini,* $\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}$ *tend vers* $\frac{2}{3}$ *et* $y(t)-\frac{2}{3}x(t)=\frac{t^3+t^2-2t}{3(t^2-1)}=\frac{t(t+2)}{3(t+1)}$ *tend vers* $\frac{1}{2}$. *La droite d'équation* $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ *est asymptote à la courbe. La position relative est fournie par le signe de* $y(t)-\left(\frac{2}{3}x(t)+\frac{1}{2}\right)=\frac{2t^2+t-3}{6(t+1)}=\frac{(t-1)(2t+3)}{6(t+1)}$.
- ***Tableau de variations conjointes.***

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$1+\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-2,59\ldots$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$		$\searrow$		$-\infty \Vert +\infty$		$\searrow$		$2,59\ldots$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$			$\nearrow$			$0,17\ldots$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2,48\ldots$	$\nearrow$			$+\infty$
$y'(t)$			$+$				0	$-$	$\Vert$	$-$	0		$+$		

- ***Intersection avec les axes.***
$x(t)=0$ équivaut à $t=0$. La courbe coupe (Oy) au point $M(0)=(0,0)$. $y(t)=0$ équivaut à $t=0$ ou $t=\frac{2}{3}$. La courbe coupe (Ox) au point $M(0)=(0,0)$ et $M(\frac{2}{3})=(-\frac{8}{15},0)$.
- ***Tracé de la courbe.***



7.3.2 Une courbe de Lissajous

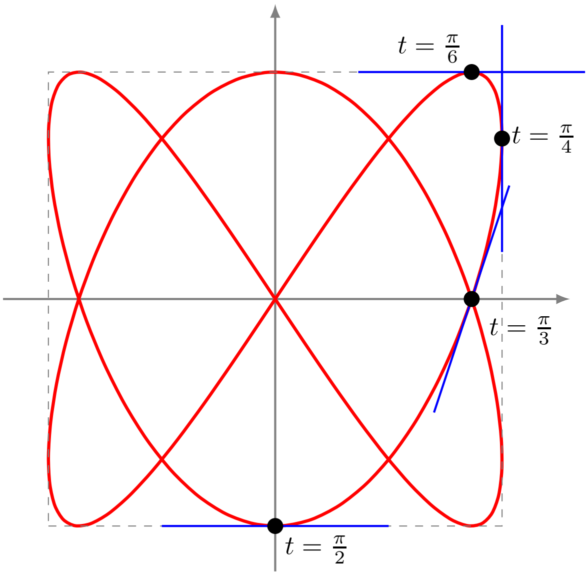
Exemple *Construire la courbe* $\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$ *de la famille des courbes de Lissajous.*

Solution.

- ***Domaine d'étude.*** *Pour tout réel* t, $M(t)$ *existe et* $M(t+2\pi) = M(t)$. *On obtient la courbe complète quand* t *décrit* $[-\pi, \pi]$.
  Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t) = s_O(M(t))$, *puis pour* $t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$. *On étudie et on construit l'arc quand* t *décrit* $[0, \frac{\pi}{2}]$, *puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe* (Oy) *puis par symétrie centrale de centre* O. *Puisque, pour tout réel* t, $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, *l'axe* (Ox) *est également axe de symétrie de la courbe.*
- ***Localisation.*** *Pour tout réel* t, $|x(t)| \leq 1$ *et* $|y(t)| \leq 1$. *Le support de la courbe est donc contenu dans le carré* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.
- ***Variations conjointes.*** *D'après les propriétés usuelles de la fonction sinus, la fonction* x *est croissante sur* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ *; et de meme, la fonction* y *croit sur* $[0, \frac{\pi}{6}]$ *et décroit sur* $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.
- ***Vecteur dérivé et tangente.***
  - *Pour* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \big(2\cos(2t), 3\cos(3t)\big)$. *Par suite :*

    $$\frac{\overrightarrow{dMdt}}{}(t) = \vec{0} \iff \cos(2t) = \cos(3t) = 0 \iff t \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cap \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) = \varnothing.$$

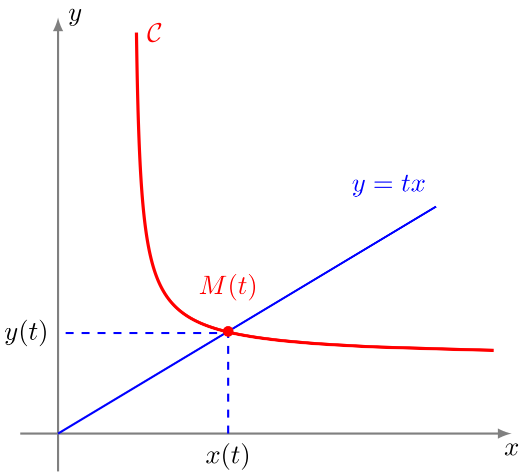
    Donc $\frac{\overrightarrow{dMdt}}{}$ *ne s'annule pas et la courbe est régulière. La tangente en tout point est dirigée par le vecteur* $\big(2\cos(2t), 3\cos(3t)\big)$.
  - *Cette tangente est parallèle à* (Ox) *si et seulement si* $\cos(3t) = 0$ *ou encore* $t \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ *ou enfin* $t = \frac{\pi}{6}$ *et* $t = \frac{\pi}{2}$, *et cette tangente est parallèle à* (Oy) *si et seulement si* $\cos(2t) = 0$ *ou encore* $t \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ *ou enfin* $t = \frac{\pi}{4}$.
  - *La tangente en* $M(0)$ *est dirigée par le vecteur* $(2, 3)$ *et a donc pour coefficient directeur* $3/2$.
  - *Pour* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $M(t) \in (Ox)$ *si et seulement si* $\sin(3t) = 0$ *ou encore* $t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ *ou enfin* $t = 0$ *ou* $t = \frac{\pi}{3}$. *La tangente en* $M(\pi/3)$ *est dirigée par le vecteur* $(-1, -3)$ *et a donc pour coefficient directeur* 3.



7.3.3 Le folium de Descartes

Il existe d'autres facons de définir une courbe, par exemple par une équation cartésienne du type $f(x, y) = 0$*. Par exemple,* $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$ *définit le cercle de rayon* 1*, centré à l'origine.*

Pour étudier les équations $f(x, y) = 0$*, il nous manque un cours sur les fonctions de deux variables. Néanmoins, il est possible dès à présent de construire de telles courbes en trouvant une paramétrisation. Une idée (parmi tant d'autres), fréquemment utilisée en pratique, est de chercher* l'intersection de la courbe avec toutes les droites passant par l'origine *comme le montre le dessin suivant. Ceci revient en gros à prendre comme paramètre le réel* $t = \frac{y}{x}$.



Exemple *Construire le folium de Descartes $\mathcal{C}$ d'équation $x^3+y^3-3axy=0$, a étant un réel strictement positif donné.*

Solution.

Commencons par montrer que l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est réduità l'origine :

$$M(x,y)\in\mathcal{C}\cap(Oy)\iff x^3+y^3-3axy=0 \quad et \quad x=0 \iff x=y=0.$$

Soient $t\in\mathbb{R}$ et D_t la droite d'équation $(y=tx)$. Cherchons l'intersection de cette droite D_t avec notre courbe $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} M(x,y)\in D_t\cap\mathcal{C}\setminus(Oy) &\iff \begin{cases} x\neq 0\\ y=tx\\ x^3+t^3x^3-3atx^2=0\end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 0\\ y=tx\\ (1+t^3)x-3at=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x\neq 0\\ x=\frac{3at}{1+t^3}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\end{cases} \quad pour\ t\notin\{-1\} \iff \begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\end{cases} \quad pour\ t\notin\{-1,0\}.\end{aligned}$$

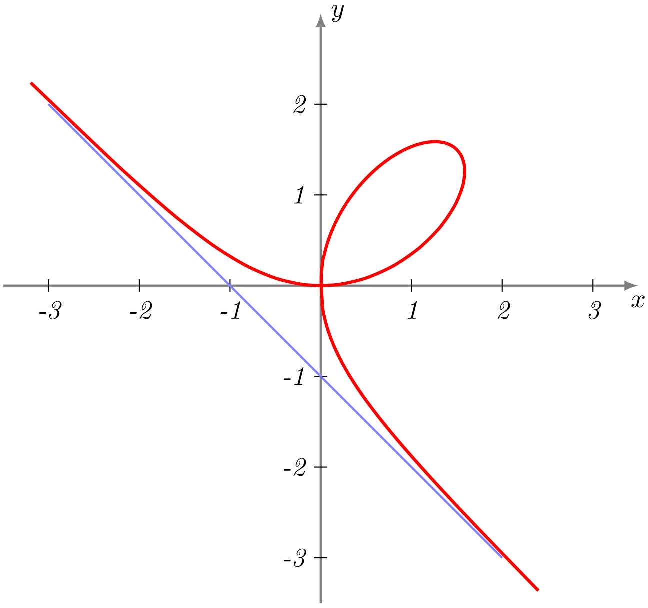
Ainsi $\mathcal{C}$ est la réunion de $\{O\}$ et de l'ensemble des points $\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right)$, $t\notin\{-1,0\}$. D'autre part les droites D_{-1} et D_0 n'ont qu'un point commun avec $\mathcal{C}$, à savoir le point O. Comme $t=0$ refournit le point O, on a plus simplement :

$$\mathcal{C}=\left\{\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right) \mid t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}.$$

Une paramétrisation de la courbe est donc

$$t\mapsto\begin{cases} x(t)=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y(t)=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}.$$

Après étude, on obtient le graphe suivant :


y
2
1
-3
-2
-1
1
2
3
x
-1
-2
-3

8

Séries et Examens

Université Molay Issmail *Module Analyse I*
FS de Meknes *Filière SMPC I /2015-2016*

Série de TD N°1

Exercice 1

1) Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un maximum , une borne inférieure, un minimum ?

$$A = [-3; 0[, \quad B = \{0\} \cup]-2; 1], \quad C =]-\infty; 0], \quad D = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$$

2) Soit E un sous-ensemble non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x_0 \in E$ tel que $supE < x_0 + \varepsilon$
3) Déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in E \quad \texttt{tel que} \quad supE - \varepsilon < x_0 \leq supE$$

Exercice 2

1) *En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que :*
a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$. *b)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$. *c)* $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$.

2) *On considère la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6 - \dfrac{9}{u_n} \\ u_0 = 7 \end{cases}$$

a) Montrer que $u_n > 3$ *et déduire sa nature.*

b) Montrer que la suite $a_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ *est une suite arithmétique dont on donnera l'expression en fonction de* n*. En déduire* u_n *en fonction de* n*.*

Exercice 3

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) *suivantes :*

$$a)\ u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \qquad b)\ u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$$
$$c)\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad d)\ u_n = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^n} \quad \forall n \geq 1$$

Exercice 4 *Soient* $a > 0$ *et*

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$$

a) Montrer que si $a \geq 1$ *alors* $u_n \to +\infty$*.*
b) On suppose $0 < a < 1$*. Montrer que la suite* (u_n) *est convergente. On pourra exploiter la majoration* $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ *valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 5 *On considère la suite récurrente.*

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$

1) *Etudier* f *et le signe de* $f(x) - x$*, en déduire les limites possible de* u_n*.*
2) *On suppose que* $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{4}$*.*
   Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ *et qu'elle est croissante, en déduire sa limite.*
3) *On suppose* $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{3}{4}$*. Montrer que* (u_n) *est décroissante et minorée. Quelle est la nature de* (u_n) *?*
4) *On suppose* $u_0 > 3/4$*. Montrer que* (u_n) *est croissante. Quelle est la nature de* (u_n) *(si elle est convergente, préciser sa limite) ?*

Exercice 6 *a) Pour* $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$*, établir :*

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) *et* (v_n) *définies par*

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$*,* $u_n \leq v_n$*,* $u_n \leq u_{n+1}$ *et* $v_{n+1} \leq v_n$*.*
c) Etablir que (u_n) *et* (v_n) *convergent vers une même limite.*

Exercice 7 *On considére la suite* (u_n) *déterminée par :*$u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

a.) *Etudier la fonction* $f : x \longrightarrow 1 + \frac{1}{x}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ *est déféni t et* $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

b.) *Montrer que :* $\forall n \geq 1 \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$

c.) *Montrer que la fonction* fof *est croissante sur l'intervalle* $]0; +\infty[$.
En déduire que les suites (u_{2p}) *et* (u_{2p+1}) *sont adjacentes ; calculer leur limite commune* l.

d.) *Montrer qu'on a :* $\forall n \geq 1 \quad |u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$

Exercice 8 *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2 . \end{cases} \tag{8.1}$$

est divergente.

Université Molay Issmail *Module Analyse I*
FS de Meknes *Filière SMPC I /2015-2016*

Série de TD N°2

Exercice 1

1. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes*

$$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}\,; \quad b)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4x+3}\,; \quad c)\ f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}\,;$$

2. *Déterminer la parité des fonctions suivantes*

$$a)\ f(x) = \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad b)\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,;$$
$$c)\ f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,; \quad d)\ f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Exercice 2

1. *Calculer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :*
   $a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}\ .\quad b)\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{x-\sin(x)}\,;\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}\ .$
2. *Dterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :*
   $a)\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \left[\dfrac{1}{x}\right]\,;\quad b)\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]\quad c)\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

Exercice 3

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *définie par*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

2. *Montrer que* f *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $]-1,1[$
3. *Déterminer, pour* $y \in]-1,1[$ *une expression de* $f^{-1}(y)$ *analogue à celle de* $f(x)$

Exercice 4

1. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continue. Montrer que* f *admet un point fixe.*
2. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
   a) Montrer que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ *alors* f *admet un point fixe.*
   b) Montrer que si $[a,b] \subset f([a,b])$ *alors* f *admet un point fixe.*

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *telle que*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & si\quad x \neq 0, \\ 0 & si\quad x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *n'est pas continue en* 0.
2. *On considère la fonction* $g(x) = xf(x)$, *montrer que* g *est continue en* 0.

Exercice 6 *Soit* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *continue, telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ *tel que* $f(\alpha) = \alpha$.

$\Big($Indication : Remarquer que si $f(0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty\Big)$

Exercice 7

1. *Montrer que l'équation* $x^7 + 3x^4 - x - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans* $]0, 1[$.
2. *Montrer que l'équation* $\ln(x^3 + x^2 + x - 3) = 0$ *admet une solution unique dans* $]1, 2[$.

Exercice 8

Soit f *une fonction réelle définie sur* $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un nombre réel $k \in]0, 1[$

tel que

$$|f(x) - f(x')| \leq k |x - x'|, \ \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *On définit la suite* $(x_n)_n$ *par :*

$$\begin{cases} x_0 & = & a, \\ x_{n+1} & = & f(x_n). \end{cases}$$

a) Montrer que la suite $(x_n)_n$ *converge vers un réel* $l \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $l = f(l)$.

Exercice 9 (Facultatif)

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe.*
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée. En déduire qu'elle admet un point fixe.*
3. *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue possédant une limite finie* ℓ *en* $+\infty$. *Montrer qu'elle est bornée.*

Université Molay Issmail *Module Analyse I*
FS de Meknes *Filière SMPC I /2015-2016*

Série de TD N°3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$*, définie par* $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

1. *Montrer que* f *admet un prolongement par continuité en* 0*, noté* g*.*
2. *Montrer que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$
3. *Montrer que* g' *n'est pas continue en* 0*.*

Exercice 2 *Soit la fonction* f *définie par* $f(x) = arctan(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$*.*

1. *Donner le domaine de définition de* f*.*
2. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$*.*
3. *Etudier la dérivabilité à droite en 0.*
4. *Etudier les variations de* f*.*
5. *Montrer que* f *définit une bijection entre* $[1, +\infty[$ *et un intervelle* J *qu'on déterminera.*
6. *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution unique* α *dans* $[1, 2]$*.*
7. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que*

$$\forall x \in [1, 2], \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|.$$

(On donne $arctan(\frac{2\sqrt{2}}{3}) \simeq 0,76$*).*

Exercice 3

1. *A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$*.*
2. *Montrer les encadrements suivants :*

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$*.*

   b) $\forall x > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$*.*

Exercice 4

a) Soit f *une fonction définie et continue sur* $[0, +\infty[$*, dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et vérifiant* $f(0) = 0$*. Montrer que si* $f'(x)$ *est croissante, il en est de même pour* $\dfrac{f(x)}{x}$*.*

b) Soit f *une fonction dérivable sur* $\boldsymbol{R}$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $\forall x \geq 0$*,* $f(x) \geq x$*. Montrer que* $f'(0) \geq 1$*. Montrer que,* $\forall x \in]0, +\infty[$*, il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $f'(c) \geq 1$*.*

c) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq mx$.

Exercice 5 *Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :*

$$a)\quad \frac{ln(1+x)}{1+x} \text{ en 0 à l'ordre } 4; \qquad b)\quad arctan\left(\frac{ln(1+x)}{1+x}\right) \text{ en 0 à l'ordre } 4.$$

$$c)\quad \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}; \qquad d)\quad ln(x+\sqrt{1+x^2}) - ln(x) \text{ à l'ordre 4 en } +\infty$$

Exercice 6 *Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :*

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (cos(x) + x)}{x^2} \ ; \qquad b) \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$c) \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{sin^2(x)}\right);$$

Exercice 7 *Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2tanx - x$.*

a) Montrer que f admet une fonction rèciproque de classe C^1.

b) Justifier que f^{-1}est impaire.

c) Donner le développement limitèe de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Exercice 8 *Soit f une fonction de classe C^2 de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, ..., n\}$. Ecrire la formule de Taylor-Young de f à l'ordre 2 au point $\frac{p}{n^2}$.*
2. *On considère la suite $(u_n)_n$; $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right)$. Montrer que*

$$u_n = \frac{n+1}{2n}f'(0) + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}f^{(2)}(0) + R_n,$$

   R_n à déterminer.

3. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}f'(0)$.*

Université Molay Ismail
FS de Meknes

Module Analyse I
Filière SMPC I /2014-2015

EXAMEN

Durée : 1 heure 30 mn

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1(3pts)

1) Donner la définition de deux suites adjacentes .
2) Énoncer le théorème de Rolle, en donnant précisément les hypothèses et la conclusion.

Exercice 2(5 pts)

Soit $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

1) En appliquant le théorème des A. F. montrer que : $\forall x > 0, \frac{x}{3(1+x)} < \log f(x) < \frac{x}{3}$.
2) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3) Déduire la limite de :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x + \frac{2}{3}x}{x^2}$$

PROBLEME (13 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+3}$

1) Donner le domaine de définition de f et Montrer que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \text{on a :} \quad f''(x) > 0.$$

2) Déduire que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \text{on a :} \ \frac{2}{9} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

3) Déterminer l'image de l'intervalle $[0,1]$ par f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0,1]$. Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

5) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est α. (α étant le point fixe de f sur $[0,1]$).
6) Montrer que $u_n \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

7) *En utilisant que* $\alpha = f(\alpha)$, *montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$$

8) *Déduire que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |\frac{1}{3} - \alpha|$$

et que (u_n) *converge vers* α.

9) *Déterminer un rang à partir duquel* $|u_n - \alpha| < 10^{-3}$

Université Molay Ismail
FS de Meknes

Module Analyse I
Filière SMPC I /2014-2015

Examen de Rattrapage

Durée : 1 heure 30 mn

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1*(6pts)*

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1) *Déterminer D_f , le domaine de définition de f .*
2) *Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.*
3) *Déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.*

Exercice 2*(6pts)*

1) *Enoncer le théorème des accroissements finis.*
2) *Montrer que pour tout $x > 0$,*

$$\frac{1}{1+x} < ln(1+x) - ln(x) < \frac{1}{x}.$$

3) *Déduire la limite de :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

PROBLEME (8 pts)

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

1) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à $[1, 2]$.*
   Soit g la fonction définie sur $[\alpha, 2]$ par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2) *Montrer que g est croissante sur $[\alpha, 2]$.*

3) En déduire que l'image de $[\alpha, 2]$ *par* g *est incluse dans* $[\alpha, 2]$.
Soit (u_n) *la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [\alpha, 2] \\ u_{n+1} = g(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4) Montrer que (u_n) *est monotone.*

5) En déduire que (u_n) *est convergente vers* α.

BONNE CHANCE !

Eléments de correction de l'examen de Rattrapage

Exercice 1

1)
$$D_f =]-1,1[$$

2) D'une part, la fonction f est continue sur son domaine de définition puisque c'est la composée de fonctions continues sur $]-1,1[$ *et d'autre part, f est strictement décroissante sur cet intervalle ; en effet, par un calcul simple on montre que :*

$$f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0$$

Donc, la fonction f *est bijective de* $]-1,1[$ *vers* $f(]-1,1[)$*. Or,*

$$f(]-1,1[) =]-\infty,+\infty[$$

1) Comme f *est bijective de* $]-1,1[$ *vers* $]-\infty,+\infty[$*, alors sa fonction réciproque* f^{-1} *existe et est définie de* $]-\infty,+\infty[$ *vers* $]-1,1[$ *par :*

$$f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

Exercice 2

1) Cours

2) soit $g(x) = \log(x)$ *pour* $x > 0$; *Comme g est continue sur* $[x, 1+x]$ *et est dérivable sur* $]x, 1+x[$ *on peut appliquer le théorème des A.F sur* $[x, 1+x]$: $g(x+1)-g(x) = g'(c) = \frac{1}{c}$ *avec* $x < c < 1+x$.
donc on a : $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$.
D'où $\frac{1}{1+x} \leq \log(1+x) - \log(x) \leq \frac{1}{x}$.

3) Déduire la limite de :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x. = \lim_{x\to+\infty} e^{x[\log(1+x)-\log(x)]}$$

et d'après 3) *on déduit que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

PROBLEME

1) f *est continue sur* $\mathbb{R}, f(1) = -1 < 0 \quad f(2) = 29 > 0$*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :* $\exists\alpha \in]1,2[/ f(\alpha) = 0$*. D'autre part* $f'(x) = 5x^4 - 1 >$

$0 \forall x \in [1,2]$. *La fonction f est donc strictement croissante sur* $[1,2]$. *On en déduit que α est unique*

2) $g'(x) = \frac{f(x).f"(x)}{f'^2(x)}$ *or* $\forall x \in [\alpha, 2] \quad f(x) \geq 0$ *et* $f"(x) = 20x^3 > 0$ *d'où* $g'(x) \geq 0$.

3) *La fonction g est continue et croissante sur* $[\alpha, 2]$ *donc* $g([\alpha, 2]) = [g(\alpha), g(2)] = [\alpha, 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}] \subset [\alpha, 2]$ *cqfd.*

4) *Comme g est croissante, la suite (u_n) est monotone.*

5) *La suite (u_n) est bornée (car $\forall n u_n \in [\alpha, 2]$) et elle est monotone, elle est donc convergente. Comme g est continue sa limite l vérifie $g(l) = l$ c-à-d $f(l) = 0$, on en déduit que $l = \alpha$ (car $l \in [\alpha, 2]$).*

Bibliographie

[1] *J. Bass.* Cours de Mathématiques. 2Tomes, Masson et Cie, 1er édition 1956, 4eme édition 1968.

[2] J*, Dixmier.* Cours de Mathématiques du premier cycle. 2Tomes, Gauthier-Villars, 1966. *(Ce livre correspond au programme de MP, un peu différent de celui de pc et plus orienté vers les mathématiques abstraites.)*

[3] P*, Louquet.* Les mathématiques en PC avec exercices et problèmes résolus. , A.Colin, 1970.

[4] Léonce*, Lesieur ;* Jean*, Lefebvre.* Mathématiques, Tome 2, Analyse, 1ere année, 1er cycle, Armand. Colin, Collection U, 1967.

[5] Bernard*, Calvo ;* Jacques*, Doyen ;* Adina*, Calvo ;* Françoise*, Boshet.* Exercices d'Analyse, 1er cycle scientifique, préparation aux grands écoles, 1er année, Armand. Colin, Collection U, 1970.

[6] Roland*, Goulfier.* Précis de Mathématiques, cours,exercices d'applications résolus, Tome 2, Analyse 1, classes préparatoires - premier cycle universitaire , Bréal, 1973.

[7] Daniel*, Guinin ;* François*, Aubonnet ;* Bernard*, Joppin ;.* Précis de Mathématiques. Cours, Exercices résolus, Tome 3, Analyse 1, 3eme édition. Classes préparatoires - Premier Cycle Universitaire , Bréal, 1994,.

[8] Claude*, Gilormini ;* Gérard*, Hirsch .* Fonctions Numériques d'une variable réelle. Cours, Exercices, Tests, 2eme édition. Collection : "Comprendre et appliquer" Mathématiques pratiques élémentaires, Masson, 1995.

[9] Frank*, Ayres Jr.* Mathématiques de base$\cdots$, plusieurs fascicules, Série Schaum, 1972.

[10] Philippe*, Michel.* Cours de Mathématiques pour économistes, Economica, 1989.

[11] F*, Pécastaings ;* J*, Sevin.* Chemin vers l'Analyse, Tome 1, exercices avec rappels de cours pour les classes préparatoires et le premier cycle universitaire , Vuibert, 1980.

[12] E*, Azoulay ;* M*, Messeri et* M*, Serfaty.* Exercices de Mathématiques (avec rappel de cours). *plusieurs fascicules,SEDES.*

[13] Monier*, Jean-Marie.* Analyse MPSI, cours, et 1000 exercices corrigés. Collection J'intègre, Série Monier, 4eme édition. Classes préparatoires - Premier Cycle Universitaire , Dunod, 2003.

[14] ProjetExo7 *, Projet Exo7.* Le cours Exo7 de première année , http ://exo7.emath.fr/.