Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences, Meknès

Département de Mathématiques
Filière SMPC II

Cours d'Analyse II

Mohamed RHOUDAF

Filière : SMPC II.

Année universitaire 2015/2016.

Table des matières

1

Calcul Integral

N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques, suggestions et corrections concernant ce document.
M. RHOUDAF

1.1 Primitives

1.1.1 Définitions

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

***Exemple* 1.** : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

***Exemple* 2.** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction F définie sur R par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de f.

- On calcule F', la dérivée de F et on vérifie que l'on obtient f :
- $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} + 0 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = f(x)$.

Propriété Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel $k\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $G(x) = F(x) + k$.

Preuve : Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $(F-G)' = F'-G' = f-f = 0$ donc $F - G$ est une constante k

Propriété Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

Preuve : On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

***Exemple* 3.** : Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

Théorème Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$. Alors la fonction

$$F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en x_0.

Preuve : Calculons la dérivée de F. Soient $x \in]a, b[$ et h un réel assez petit tel que $x + h \in]a, b[$. On a :

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{x+h} f(t)dt,$$

donc :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt,$$

ce taux d'accroissement est la moyenne de f sur $[x, x+h]$. Il existe donc

$c \in [x, x+h]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$. Or, il existe $t \in [0,1]$ tel que $c = x+th$. Donc quand $h \to 0$, nécessairement $c \to x$ et comme f est continue alors $f(c) \to f(x)$. On a donc

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+th) = f(x),$$

par suite $F'(x) = f(x)$.

Pour les points a et b, supposons $a < b$.
Si $x = a$, dans le raisonnement précédent on prend $h > 0$ tel que $a+h \in]a,b[$, on obtient

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = F'_d(a) = f(a),$$

De même pour $x = b$, on prend $h < 0$ tel que $b+h \in]a,b[$, on obtient

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(b+h)-F(b)}{h} = F'_g(b) = f(b).$$

Donc F est dérivable et a pour dérivée f sur $[a,b]$.

Théorème Si f est une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive sur I.

Preuve. Si $I = [a,b]$, c'est une conséquence du théorème précédent. Sinon, soit c un point quelconque de I, d'après le théorème précédent la fonction $F : x \longmapsto \int_c^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I.

***Remarque* 1.1.** : Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I alors la différence $G - F$ est constante sur I.
On désigne par $\int f(x)dx$ toute primitive de f. Autrement dit :

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle.

Primitives usuelles

DOMAINE	FONCTION	PRIMITIVE
$]0,+\infty[$	$x^a,\ a\in\mathbb{R}, a\neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$Log\|x\|$
$\mathbb{R}$	$e^{ax}\quad (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$\mathbb{R}$	$\sin ax\quad (a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
$\mathbb{R}$	$\cos ax\quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin ax$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$	tgx
$]0,\pi[$	$1+cotg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$	$-cotgx$
$]-a,a[, a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\frac{x}{a}$
$]-a,a[, a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$-arccos\frac{x}{a}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$
$\mathbb{R}$	$shax, (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\ chax$
$\mathbb{R}$	$chax, (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\ shax$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$Argshx=Ln(x+\sqrt{1+x^2})$

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

1.2.1 Définitions

Définition On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

***Exemple* 4.** : Calcul de l'intégrale : $\int_2^3 x\ dx$:

- Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
- donc, $\int_2^3 x\ dx = F(3) - F(2) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{4}{2} = \dfrac{5}{2}$.

***Remarque* 1.2.** :
- L'intégrale d'une fonction f sur $[a;b]$ est indépendante du choix de la primitive F.

  On note aussi $\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

  Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\ dx$, la variable x est « muette »,

  ce qui signifie que $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \ldots$

  Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

***Remarque* 1.3. Aire d'un fonction positive** :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}$.
On note $\int_a^b f(t)dt$ cette aire.

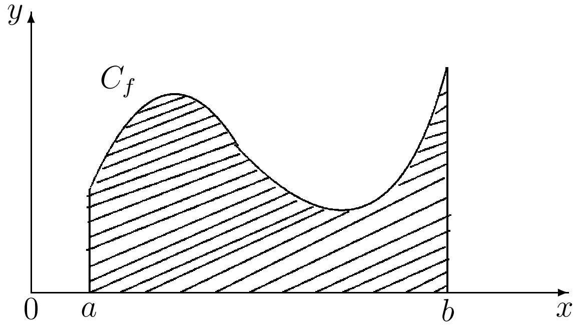

Fig. 3

Remarque. Si f est intégrable sur $[a, b]$ on appelle, par définition, l'aire géométrique de l'ensemble D le nombre réel : $\int_a^b |f(x)|dx$.

1.2.2 Propriétés de l'intégrale

Propriété Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, λf, $|f|$ et fg sont intégrables sur $[a, b]$ et on a :

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, b],$

(Relation de Châsles)
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Inégalité de Cauchy-Schwarz Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right).$$

Preuve : La fonction $(f+\lambda g)^2$ est positive sur $[a, b]$ pour tout réel λ. Donc le polynôme de deuxième degré

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2dx \\ &= \int_a^b (f(x))^2dx + 2\lambda \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b (g(x))^2dx \end{aligned}$$

est toujours positif pour tout réel λ par suite son descriminant

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right) \leq 0.$$

Théorème Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue, sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b].
En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b].

Exemple. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

cette fonction est intégrable car elle est bornée et admet l'origine pour seul point de discontinuité.

1.2.3 Inégalité de la moyenne

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
S'il existe des réels m, M et k tels que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

- $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$.
- $|f| \leq k$, alors $\int_a^b |f(x)|\, dx \leq k(b-a)$.

Définition Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $(a \neq b)$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

***Exemple* 5.** : La valeur moyenne sur $[0; 1]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}.$$

Propriété Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $(a \neq b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. = f(c).$$

Cette relation est appelée **Formule de la moyenne**.

Preuve : f continue sur $[a, b]$, soient alors m et M dans R tels que :

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad m \leq f(x) \leq M,$$

donc $\int_a^b m dx = m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$ par suite

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

D'après, le théorème des valeurs intermédiaires, on a le résultat.

1.2.4 Inégalité des accroissements finis

Les théorèmes de comparaison d'intégrales permettent d'obtenir des encadrements d'une fonction lorsqu'on sait encadrer sa dérivée.

Inégalité des accroissements finis Soit f une fonction dont la dérivée f' est dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
S'il existe trois réels m, M et k tels que, pour tout x de $[a, b]$, on ait
- $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
- $|f'(x)| \leq k$ alors $\| f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

1.2.5 Methodes d'intégrations

Lorsqu' on connait une primitive d'une fonction, on peut calculer son intégrale, en utilisant le théorème suivant :

Théorème fondamental de l'intégration : Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Preuve : Soit $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en a. On a : $G(x) = F(x) + C$ avec $C \in R$, donc $G(a) = F(a) + C = 0$ et $C = -F(a)$ par suite $G(x) = F(x) - F(a)$.
D'où $G(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

***Remarque* 1.4.** : Il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de primitives; par exemple la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$, est intégrable mais n'a pas de primitive. En effet, si F est une primitive de f sur $[0,1]$ on aura $F'(x)=0$ pour $x\neq\frac{1}{2}$, par suite F est constante sur $[0,\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2},1]$, de plus F est continue sur $[0,1]$ donc constante sur $[0,1]$ par conséquent $F'=f$ est identiquement nulle sur $[0,1]$ ce qui est impossible.

***Remarque* 1.5.** : Il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas intégrable ; par exemple la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$, est dérivable mais sa dérivée

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\quad si\ x\neq 0\ \ et\ \ f'(0)=0$$

n'est pas intégrable car elle n'est pas bornée.

1.2.6 Première méthode :Intégration par parties

Théorème Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Preuve : On a : $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ donc

$$\int_a^b (fg)'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b=\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

***Exemple* 6.** : Calculons $\int_1^e ln(x)dx$. On pose $f(x)=ln(x)$ et $g'(x)=1$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x$. Ainsi

$$\int_1^e ln(x)dx=[xln(x)]_1^e-\int_1^e dx=1.$$

1.2.7 Deuxième méthode : Changement de variables

Théorème Soient $f:I\to\mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $I\subset\mathbb{R}$, et $\phi:J\to I$ une application bijective d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle I, tels que ϕ et ϕ^{-1}

soient continûment dérivables. On a alors

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Preuve : Si F est une primitive de f alors

$$(F\circ\phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Donc

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b (F\circ\phi)'(t)dt = [(F\circ\phi)(t)]_a^b = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

***Remarque* 1.6.** Si F est une primitive de f alors

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C, \quad C\in\ R.$$

Applications-Disposition pratique : Ce théorème permet de calculer $\int f$ si l'on sait calculer $\int f\circ\phi.\phi'$, ou réciproquement. Il est à la base de tout $\ll$ l'art de l'intégration $\gg$, qui consiste à trouver les bons changements de variables $x=\phi(t)$. Dans la pratique, on écrit alors

$$x=\phi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \phi'(t).$$

On écrit symboliquement $dx=\phi'(t)dt$, et on substitue ces deux équations dans l'intégrale en question :

$$\int f(x)dx = \int f(\underbrace{\phi(t)}_{x})\ \underbrace{\phi'(t)dt}_{dx}.$$

Puis, ayant trouvé la primitive $F(t)$ du membre de droite, on retourne à la variable x en substituant $t=\phi^{-1}(x)$.

***Remarque* 1.7.** : Il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration après chaque changement de variable.

***Remarque* 1.8.** : Il faut s'assurer que la fonction ϕ est effectivement une bijection, généralement en considérant ses propriétés de monotonie. Dans le cas échéant, il faut découper l'intervalle d'intégration en des sous-intervalles sur lesquels ϕ est monotone.

Exemple 7. : Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$.
Posons $\phi(t) = t^2 + 1$ donc $\phi'(t) = 2t$, ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2}dt = \int_0^1 \frac{d(\phi(t))}{(\phi(t))^2} = \int_1^2 \frac{d\phi}{\phi^2} = \left[-\frac{1}{\phi}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Exemple 8. : Calculons la primitive $\int \sin x \cos x dx$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Posons $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$. C'est justifié car sin est une bijection continue de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, et la fonction réciproque $x = arcsint$ est également dérivale à l'intérieur de cette intervalle. D'où

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + c$$

1.2.8 Fractions rationnelles

Dans ce (long) chapitre, on montre comment on trouve une primitive pour toute fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes. La première partie de ce chapitre est plutôt algébrique : nous citons et utilisons ici plusieurs théorèmes importants d'algèbres sans démonstration.

Définition On appelle fraction rationnelle réelle toute fonction f de la forme : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

Définition Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels. On appelle division euclidienne (ou division selon les puissances décroissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple (Q, R) tel que : $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ avec $R = 0$ ou bien $d^\circ R < d^\circ B$, (d°=degré) . Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste.

Exemple 9. Soient $A(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$. Pour effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ on divise le terme de plus haut degré de $A(x)$, soit $2x^4$, par le terme de plus haut degré de $B(x)$, soit x^2 : on obtient $2x^2$ puis on multiplie $2x^2$ par $B(x)$ et on retranche le résultat de $A(x)$ on obtient alors le premier reste $R_1(x) = -x^3 - 5x^2 + x - 1$. On recommence l'opération en remplaçant $A(x)$ par $R_1(x)$ on obtient le deuxième terme du quotient égal à $-x$ et le deuxième reste $R_2(x) = -4x^2 + 2x - 1$. On recommence l'opération en remplaçant $R_1(x)$ par $R_2(x)$ on obtient $Q(x) = 2x^2 - x - 4$ et $R_3(x) = R(x) = 6x + 4$.
En pratique on procède comme dans le cas de la division selon les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 & x^2 + x + 1 \\
2x^4 + 2x^3 + 2x^2 \quad & \\ \cline{2-2}
 & 2x^2 - x - 4 \\ \cline{1-1}
-x^3 - 5x^2 + x - 1 & \\
-4x^2 - 4x - 4 \quad & \\ \cline{1-1}
6x + 4 \quad & \\
\end{array}
$$

Propriété Tout polynôme non nul $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$P(x) = c(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}...(x-r_p)^{m_p}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}$$

$$P(x) = c\left(\Pi_{k=1}^{p}(x-r_k)^{m_k}\right)\left(\Pi_{k=1}^{q}(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}\right)$$

avec $b_q^2 - 4c_q < 0,\ m_k,\ n_k\ \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c \neq 0$.

Décomposition en éléments simples .

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucune racine commune. Si

$$Q(x) = c\Pi_{k=1}^{p}(x-r_k)^{m_k}\Pi_{k=1}^{q}(x^2+b_kx+c_k)^{n_k},$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $c \neq 0$ alors la décomposition en éléments simples de $f(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(x) = E(x) + \sum_{1\leq i\leq p}\sum_{1\leq j\leq m_i}\frac{A_{i,j}}{(x-r_i)^j} + \sum_{1\leq i\leq q}\sum_{1\leq j\leq n_i}\frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$$

où $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles, et $E(x)$ est un polynôme appelé partie entière de la fraction rationnelle $f(x)$.

***Remarque* 1.9.** La partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle $f(x)$ n'est autre que le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
On a donc $P(x) = Q(x)E(x) + R(x)$ avec $d^\circ R(x) < d^\circ Q(x)$ ou bien $R(x) = 0$.
On en déduit que :

$$f(x) = E(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

***Remarque* 1.10.** Pour calculer une primitive de $f(x)$ il suffit alors de calculer les primitives de

$$E(x), \quad \frac{a}{(x-b)^n}, \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, \; n \geq 1, \; c^2-4d<0.$$

- Calcul de $\int \frac{a}{(x-b)^n} dx$. On a :

$$\int \frac{a}{(x-b)^n} dx = \begin{cases} aLog|x-b| + C & \text{si} \quad n=1 \\ \frac{-1}{n-1} \frac{a}{(x-b)^{n-1}} + C & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

- Calcul de $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$. On a :

$$\begin{aligned} & \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx \\ = \; & \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx + (-\frac{a}{2}c+b) \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}. \end{aligned}$$

- Calcul de $\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx$. On a :

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx = \begin{cases} Log|x^2+cx+d| + C & \text{si} \quad n=1 \\ -\frac{1}{(n-1)(x^2+cx+d)^{n-1}} + C & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

- Calcul de $I(x) = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}$. On a :

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{c}{2})^2 + (d-\frac{c^2}{4})\right]^n},$$

on pose $u = x + \frac{c}{2}$ et $\alpha^2 = (d - \frac{c^2}{4}) > 0$; car $\Delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{du}{\alpha \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{dv}{\left[v^2+1\right]^n}; \quad v = \frac{u}{\alpha} \end{aligned}$$

Enfin pour calculer $I(x)$ il suffit de calculer $I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Si $n=1$ on a : $I_1(x) = arctgx + C$.

Si $n \geq 2$ nous avons la relation de récurrence suivante :

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n(x).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left[I_n(x) - I_{n+1}(x)\right].
\end{aligned}$$

***Exemple* 10.** : Calculons $J(x) = \int \dfrac{dx}{(x^2+x+\frac{5}{4})^2}$. On pose $u = x + \frac{1}{2}$ on obtient : $J(x) = \int \dfrac{du}{(u^2+1)^2}$. D'après le résultat précedent on a :

$$\begin{aligned}
J(x) = I_2(u) &= \frac{1}{4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}arctgu + C \\
&= \frac{1}{4}\frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+1)^2} + \frac{3}{4}arctg(x+\frac{1}{2}) + C.
\end{aligned}$$

***Exemple* 11.** : Calculons $I(x) = \int \dfrac{x^3+4x-1}{x^2-1}dx$.
On pose $P(x) = x^3+4x-1$ et $Q(x) = x^2-1$, la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ donne :

$$P(x) = xQ(x) + 5x - 1,$$

donc, d'après la proposition 5.6, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}. \quad (1)$$

Il existe plusieurs methodes pour calculer les constantes a et b. La methode générale consiste à réduire au même dénominateur les deux membres de l'égalité (1), puis identifier les coefficients des numérateurs. Une autre methode simple dans ce cas est la suivante :
Pour calculer a on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par $x-1$ puis on donne à x la valeur 1 on obtient $a = 2$.
Pour calculer b on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par $x+1$ puis on donne à x la valeur -1 on obtient $b = 3$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int xdx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2Log|x-1| + 3Log|x+1| + C, \quad C \in R.
\end{aligned}$$

Calculons $I(x) = \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx$. D'après, la proposition 5.6, la fraction rationnelle $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1}.$$

Par identification on obtient

$$3x^2-3x-1 = (a_1+b_1)x^2 + (c_1-2b_1)x + (a_1-2c_1),$$

on en déduit que

$$\begin{cases} a_1+b_1 = 3 \\ c_1-2b_1 = -3 \\ a_1-2c_1 = -1, \end{cases}$$

d'où l'on tire, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et $c_1 = 1$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= Log|x-2| + Log(x^2+1) + arctgx + C. \end{aligned}$$

Application Considérons $\int F(\sin x, \cos x)dx$ où F est une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Le changement de variables ; $t = tg\frac{x}{2}$, ramène le calcul de cette primitive à celui d'une fraction rationnelle en t :

***Exemple* 12.** : Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}dx.$$

Le changement de variables $t = tg\frac{x}{2}$ nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Par conséquent :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \left[Log(1+t^2)\right]_0^1 = Log2.$$

Règles de Bioche

On cherche à calculer une primitive d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus sur ses intervalles de définition. Notons $R(\cos(x), \sin(x))$ une telle fraction rationnelle. Par exemple

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

***Remarque* 1.11.** } *La fonction tangente est elle-même une fraction rationnelle des fonctions sinus et cosinus. La méthode suivante s'applique donc également pour les fractions rationnelles en sinus, cosinus et tangente. Le calcul de ce type de primitive se fait par un changement de variable qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle. Pour choisir ce changement de variable, on utilise les règles de Bioche. Posons*

$$f(x) = R(\cos(x), \sin(x)).$$

le changement $x \mapsto -x$,	*on pose* $t = \cos(x)$
le changement $x \mapsto \pi - x$,	*on pose* $t = \sin(x)$
le changement $x \mapsto \pi + x$,	*on pose* $t = \tan(x)$

Sinon, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

***Remarque* 1.12.**

1. *Pour retrouver le changement de variable obtenu par les règles de Bioche, il suffit de se rappeler de la cohérence entre invariance et changement de variable :*

$$\begin{array}{rcl} \cos(-x) & = & \cos(x) \\ \sin(\pi - x) & = & \sin(x) \\ \tan(\pi + x) & = & \tan(x) \end{array}$$

2. *Dans le cas où les règles de Bioche préconisent un changement de variable* $t = \cos(x)$ *(resp.* $t = \sin(x)$*), on constate que la fonction* f *s'écrit en fait* $f(x) = g(\cos(x))\sin(x)$ *(resp.* $f(x) = g(\sin(x))\cos(x)$*). La fonction cosinus (resp. sinus) étant de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, ce changement de variable est valide*
3. *Le changement de variable* $t = \tan(x)$ *(resp.* $t = \tan(\frac{x}{2})$*) n'est valable que sur des intervalles ne contenant pas un point du type* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(resp.* $\pi + 2k\pi$*), avec* k *élément de* $\mathbb{Z}$*. Sur ces intervalles la fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *(resp.* $x \mapsto \tan(\frac{x}{2})$*) est bijective, dérivable et de dérivée non nulle ; le changement de variable est donc valide*
   Mais si l'on fait ce changement de variable pour chercher une primitive d'une fonction f *sur un intervalle contenant un point* $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *(resp.* $x_k = \pi + 2k\pi$*), la méthode ne nous donnera pas la primitive au point* x_k*. Il faudra prolonger par continuité les primitives obtenues à droite et à gauche de* x_k *pour obtenir une primitive dans le voisinage de* x_k
4. *Pour le changement de variable* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$*, on aura besoin des formules :*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

5. *On peut toujours choisir de faire le changement de variable* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ *sans s'intéresser aux propriétés d'invariance, mais cela a deux inconvénients*
   - *d'une part, les calculs seront plus longs car on obtiendra des polynômes de degré plus élevé,*
   - *d'autre part, si un point de la forme* $\pi + 2k\pi$ *fait partie du domaine d'étude, il sera nécessaire de faire une étude particulière pour ce point.*

6. *Dans le cas où* R *est un polynôme, le calcul d'une primitive se ramène au calcul de termes du type* $\int \sin^p(x)\cos^q(x)dx$.

***Exemple* 13.** *: Calculons une primitive sur* $]-\pi,\pi[$ *de la fonction*

$$f:\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

On a

$$f(-x)d(-x) = -\frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)}dx = f(x)dx.$$

On utilise donc le changement de variable $t = \cos(x)$ *soit* $dt = -\sin(x)dx$. *On obtient alors*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= -\int \frac{dt}{1+t}\\ &= -\ln|1+t|\\ &= -\ln|1+\cos(x)| = -\ln(1+\cos(x))\end{aligned}$$

Regardons ce qu'on obtient si on fait le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Dans ce cas, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ *et*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}\\ &= \int \frac{2t}{1+t^2}dt\\ &= \ln(1+t^2)\\ &= \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Autres changements de variable
- *Fractions rationnelles de fonctions hyperboliques : le plus simple est souvent de prendre* $u = \exp(x)$.
- *Intégrales abéliennes.* $f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, *on prend* $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

1.2.9 Sommes de Riemann

Propriété *Si f est intégrable sur $[a,b]$, la suite (S_n) définie par*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

tend vers $\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.

***Exemple* 14.** *: Calculons la limite de la suite $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ...\frac{1}{n+n}$.*
Soit f la fonction définie sur $[1,0]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. On a :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = Log2.$$

2

Intégrales généralisées

M. EL FETNASSI & M. RHOUDAF

2.0.10 Définitions et Exemples

Nous allons généraliser la définition de $\int_a^b f(x)dx$ *au cas où* f *n'est pas forcément bornée et* a, b *peuvent être* $\pm\infty$*.*

Définition *Soit* f *une fonction réelle définie sur* $]a, b[$*. On dit que* f *est localement intégrable sur* $]a, b[$ *si* f *est intégrable sur tout intervalle fermé borné* $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ *.*

***Exemple* 15.** *: La fonction* $\frac{1}{x}$ *est localement intégrable sur* $]0, 1]$*.*

1. Intégrale sur $[a, b[$ **ou** $]a, b]$

Définition *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b[$*,* $(-\infty < a < b \leq +\infty)$*. On dit que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente si la fonction*

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x < b,$$

admet une limite finie quand x tend vers b ; et on pose par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette limite n'existe pas on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.
De même si f est continue sur $]a, b]$, $(-\infty \leq a < b < +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction

$$F : x \longmapsto \int_x^b f(t)dt, \quad a < x \leq b,$$

admet une limite finie quand x tend vers a ; et on pose par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette limite n'existe pas on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Exemples :
1. La fonction $\int_0^x \cos t \; dt = -\sin x$ n'admet pas de limite lorsque $x \to \infty$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \cos t \; dt$$

est divergente.
2. La fonction $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$ tends vers 1 lorsque $x \to +\infty$, donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est pas bornée sur l'intervalle $[0, 1[$. Cependant, pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^x = \arcsin x \overset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

converge et a pour valeur $\pi/2$.

4. La fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}$, est continue sur $[0, +\infty[$ et pour *tout* $x \in [0, +\infty[$*, on a :*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x},$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*. Par suite l'intégrale de* f *sur* $[0, +\infty[$ *est convergente et on a :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

5. La fonction définie sur $[0, +\infty[$ *par :* $f(x) = \sin x$*, est continue sur* $[0, +\infty[$ *et pour tout* $x \in [0, +\infty[$*, on a :*

$$F(x) = \int_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x,$$

$F(x)$ *n'a pas de limite quand* x *tend vers* $+\infty$ *donc l'intégrale de* $\sin$ *sur* $[0, +\infty[$ *est divergente.*

6. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $]-\infty, +\infty[$ *et on a :*

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\lim_{x \to -\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}, \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

7. Calculer $\int_0^1 tln(t)\, dt$*.*
La fonction $t \to tln(t)$ *est continue sur* $]0, 1]$*, mais admet pour prolongement par continuité en 0 la fonction* g *telle que* $g(t) = f(t)$ *si* $t \neq 0$ *et* $g(0) = 0$*. Par suite* $\int_0^1 tln(t)\, dt$ *existe et on a :*

$$\int_0^1 tln(t)\, dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 tln(t)\, dt.$$

Or,

$$\int_x^1 tln(t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2}ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2}\, dt = -\frac{x^2}{2}Logx - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.$$

Donc

$$\int_0^1 t\ln(t)\,dt = -\frac{1}{4}.$$

8. La fonction définie sur $]0,1]$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$*, est continue sur* $]0,1]$*, et pour tout* $x \in]0,1]$*, on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 2$*, par suite l'intégrale de* f *sur* $]0,1]$ *est convergente et on a :*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

9. La fonction définie sur $]0,1]$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$*, est continue sur* $]0,1]$*, et on a pour tout* $x \in]0,1]$*,*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x}.$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$*, donc l'intégrale de* f *sur* $]0,1]$ *est divergente.*

10. La fonction définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$*, est continue sur* $[1,+\infty[$*, et pour tout* $x \in [1,+\infty[$*, on a :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_1^x = 2\sqrt{x} - 2.$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$*, par suite l'intégrale de* f *sur* $[1,+\infty[$ *est divergente.*

11. La fonction définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$*, est continue sur* $[1,+\infty[$*, et on a pour tout* $x \in [1,+\infty[$*,*

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$$

De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 1$*, donc l'intégrale de* f *sur* $[1,+\infty[$ *est convergente et on a :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Remarques.
1. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

peut exister sans que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente. En effet, il suffit de prendre une fonction f impaire quelconque ; par exemple $f(x)=x$, on a alors pour tout $a>0$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Mais les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ divergent.
2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et soit F une primitive de f sur $]a,b[$. La convergence de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ équivaut à l'existence des deux limites finies $F(a^+)$ et $F(b^-)$; et si ces limites existent, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^+) - F(a^-).$$

2. Intégrales sur $]a,b[$

Définition *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a,b[$, $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, et soit $c \in]a,b[$ on dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si les intégrales*

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

sont convergentes et on pose alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx$ est indépendante du choix du point c.

Remarques.
Les intégrales définies ci-dessus sont appelée **intégrales généralisées ou impropres**.

2.1 Critères de convergence

2.1.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales qui seront considérées comme des références pour la suite.
Le résultat ci-dessous est un résultat de cours qui sera donc utilisé sans avoir besoin de le redémontrer.

Propriété *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors.*
- *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.*
- *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

Preuve. *Si $\alpha \neq 1$, pour tout $x > 0$ on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[t^{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - x^{1-\alpha}\right];$$

donc :

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & si \quad \alpha < 1 \\ +\infty & si \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

De même, pour tout $x > 0$ on a :

$$G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = -F(x),$$

donc

$$\lim_{x\to +\infty} G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & si \quad \alpha > 1 \\ +\infty & si \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\lim_{x\to 0^+} Log x = +\infty, \quad et \quad \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = +\infty.$$

2.1.2 Le cas de fonctions positives localement intégrables

Integrales des fonctions positives .
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'ensemble $\{\int_a^x f(t)dt; x \in [a, b[\}$ est majoré ; dans ce cas

$$\int_a^b f(t)dt = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x f(t)dt. \tag{2.1}$$

Preuve. *$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante, donc $\lim_{x\to b} F(x)$ existe toujours ; si elle est finie l'intégrale est convergente ; sinon elle est égale à $+\infty$.*

Critère de Comparaison .
Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que : $\forall t \in [c, b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors :
- *$\int_a^b g(t)dt$ convergente $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ convergente.*
- *$\int_a^b f(t)dt$ divergente $\Longrightarrow \int_a^b g(t)dt$ divergente.*

Preuve. *Soit $c \in [a, b[$, pour tout $x \in [c, b[$ on a :*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$

Donc les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature ; car $\int_a^c f(t)dt$ est une constante, .
De la même façon, on voit que les intégrales $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.
il suffit d'étudier la convergence de $\int_c^b f(t)dt$ et de $\int_c^b g(t)dt$. Sachant que $\forall x \in [c, b[$, $0 \leq \int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x g(t)dt$ la conclusion résulte du Théorème Integrale des fonctions positives.

Exemples. *1. Etudions la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.*
A priori on ne sait pas calculer cette intégrale. Pour étudier sa nature nous allons majorer la fonction $t \to e^{-t^2}$ par une fonction simple dont l'intégrale converge.
Pour tout $t \geq 1$, on a : $0 < e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Donc, d'après la remarque précédente, la convergence à l'infinie de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ entraine celle de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Théorème des équivalents *Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à -dire :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Attention : il est important que f et g soient positives !

On notera le fait que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ par : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Preuve. *Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que leur rapport tend vers 1, ou encore :*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists A > a \;\; \forall t > A \;\; \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \epsilon,$$

soit encore :

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists A > a \;\; \forall t > A \;\; (1 - \epsilon) g(t) < f(t) < (1 + \epsilon) g(t).$$

Fixons $\epsilon < 1$, et appliquons le théoréme de comparaison sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty} (1 - \epsilon) g(t) dt$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ aussi par linéarié.

Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty} (1 + \epsilon) g(t) dt$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ diverge aussi.

Exemples.
1.Est-ce que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} dt \quad \text{converge ?}$$

Comme

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} \underset{+\infty}{\sim} t^2$$

et que nous avons l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 dt$ diverge, alors notre intégrale diverge.
2. On a

$$\frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ diverge.

Critère d'équivalence .
Soit $I = [a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. *Soit* f *et* g *deux fonctions continues, positives sur* I. *Si* f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* b ; $f \sim_b g$, *alors les intégrales*

$$\int_a^b f(t)dt \quad et \quad \int_a^b g(t)dt$$

sont de même nature. Ce résultal reste valable si on remplace l'hypothèse « f *et* g *positives* » *par* « f *et* g *ont un signe constant au voisinage de* b ».

Exemples.
1. On a

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc $\int_0^1 \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ *converge.*
2. On a

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim_0 \frac{1}{x}$$

donc $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x^2} dx$ *diverge.*

2.1.3 Le cas de fonctions localement intégrables quelconques

Critère de Cauchy

Théorème *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une application localement intégrable. L'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* f *vérifie la condition suivante, dite* critère de Cauchy : $\forall \epsilon > 0\ \exists c \in [a, b[$ *tel que* $\forall x_1, x_2 \in [c, b[$ *on a* $|\int_{x_1}^{x_2} f(t)d(t)| \leq \epsilon$.

Preuve.
– *Condition nécessaire.*
Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente, c'est a dire*

$$\lim_{x \to b} F(x) = l \in \mathbb{R} \quad où \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Par définition, $\forall \epsilon > 0 \; \exists c < b$ *tel que* $|F(x)-l| \leq \epsilon/2 \; \forall x \in [c, b[$, *donc* $|\int_{x_1}^{x_2} f(t)d(t)| = |F(x_2) - F(x_1)| \leq |F(x_1) - l| + |l - F(x_2)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \; \forall x_1, x_2 \in [c, b[$.

– *Condition suiffisante.*

Supposons que la condition de Cauchy est satisfaite. Choisissons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *arbitraire de nombres dans* $[c, b[$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. *Alors la suite* $F(x_n)$ *est de Cauchy, donc convergente. Notons* $l = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. $\forall \epsilon > 0$, $\exists c \in [a, b[$ *tel que* $|F(x') - F(x'')| = |\int_{x''}^{x'} f(t)dt| \leq \epsilon/2 \; \forall x', x'' \in [c, b[$, *et* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $|F(x_n) - l| \leq \epsilon/2 \; \forall n \geq N$. *Prenons un* $n \geq N$ *tel que* $x_n \in [c, b[$, *alors* $|F(x) - l| \leq |F(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - l| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \; \forall x \in [c, b[$.

Cela veut dire que $\lim_{x\to b} F(x) = l$.

2.1.4 Convergence absolue

Définition *Soit* $I =]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *et* f *une fonction continue sur* I. *On dit que l'intégrale de* f *sur* I *est absolument convergente si l'intégrale* $\int_a^b |f(t)|dt$ *est convergente.*

Propriété *Soit* $I =]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *et* f *une fonction continue sur* I. *S'il existe une fonction* g *continue sur* I *telle que*

$$\begin{cases} 0 \leq |f| \leq g & sur \quad I \\ \int_a^b g(t)\,dt & converge, \end{cases}$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*

Preuve. *Elle résulte immédiatement du critère de Cauchy et de l'inégalité :*

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq \int_{x_1}^{x_2} g(t)dt.$$

Corollaire 2.1. *Si* $\int_a^b |f(t)|\,dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge.*

Preuve.

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque. *La réciproque de ce corollaire est en général fausse.*

Exemples. *1. Etude de*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Comme la fonction $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^2}$ *n'est pas positive, on va étudier l'intégrale de* $|f|$.
On a : $|f(t)| \le \dfrac{1}{t^2}$ *; comme* $\alpha = 2 > 1$, *l'intégrale de* $|f|$ *est convergente, donc aussi l'intégrale de* f.

2. Montrons que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\sin t)^n\, dt$ *converge.*
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$|e^{-t}(\sin t)^n| \le e^{-t}.$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ *converge, donc* I_n *converge.*

Propriété *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *tel que* $a < b$. *Soit* f *une fonction continue sur* $]a, b]$ *telle que*

$$\lim_{t\to a}(t-a)^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}.$$

- *Si* $\alpha < 1$ *l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$ *est absolument convergente.*
- *Si* $\alpha \ge 1$ *et* $k \ne 0$, *l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$ *est divergente.*

Propriété *Soient* $a \in \mathbb{R}$, f *une fonction continue sur* $[a, +\infty[$ *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}.$$

- *Si* $\alpha > 1$ *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *est absolument convergente.*
- *Si* $\alpha \le 1$ *et* $k \ne 0$, *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *est divergente.*

***Exemple* 16.**
Montrons que $\int_2^{+\infty} e^{-t} ln(t)\, dt$ *converge.*
On a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} ln(t) = 0$$

donc

$$\int_2^{+\infty} e^{-t} ln(t)\, dt$$

est absolument convergente.

2.1.5 Intégrale semi-convergente

Définition *Une intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

***Exemple* 17.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \quad \textit{est semi-convergente.}$$

Nous allons prouver qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente.

1. ***L'intégrale est convergente.***
Pour le montrer, effectuons une intégration par parties (avec $u' = \sin t$, $v = \frac{1}{t}$*) :*

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

Examinons les deux termes :
– $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$*. Or la fonction* $\frac{\cos x}{x}$ *tend vers* 0 *(lorsque* $x \to +\infty$*), car* $\cos x$ *est bornée et* $\frac{1}{x}$ *tend vers* 0*. Donc* $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x$ *admet une limite finie (qui est* $\cos 1$*).*
– *Pour l'autre terme, notons d'abord que* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ *est une intégrale absolument convergente. En effet* $\frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ *et l'intégrale de Riemann* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *converge. Par conséquent,* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ *converge, ce qui signifie exactement que* $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt$ *admet une limite finie.*

Conclusion : $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$ *admet une limite finie (lorsque* $x \to +\infty$*), et donc par définition* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ *converge.*

2. ***L'intégrale n'est pas absolument convergente.***
Voici un moyen de le vérifier. Comme $\left|\sin t\right| \leq 1$ *pour tout* t*, on a :*

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}.$$

En appliquant une intégration par parties à $\frac{\cos(2t)}{t}$ *(avec* $u' = \cos(2t)$ *et* $v = \frac{1}{t}$*), on obtient :*

$$\int_1^x \frac{1 - \cos(2t)}{2t}dt = \frac{1}{2}\Big[\ln t\Big]_1^x - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2t)}{t}\right]_1^x - \frac{1}{4}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}dt.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}dt$ *converge absolument. Des trois termes de la somme ci-dessus, les deux derniers convergent, et le premier tend vers* $+\infty$*. Donc l'intégrale diverge,* *et par le théorème de comparaison, l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ *diverge également.*

2.1.6 Théorème d'Abel

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

Théorème d'Abel *Soit* f *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, +\infty[$*, positive, décroissante, ayant une limite nulle en* $+\infty$*. Soit* g *une fonction continue sur* $[a, +\infty[$*, telle que la primitive* $\int_a^x g(t)dt$ *soit bornée. Alors l'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, g(t)dt \quad \text{converge.}$$

Preuve.

Pour tout $x \geq a$*, posons* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$*. Par hypothèse,* G *est bornée, donc il existe* M *tel que, pour tout* x*,* $|G(x)| \leq M$*. Effectuons maintenant une intégration par parties :*

$$\int_a^x f(t)\, g(t)dt = \Big[f(t)\, G(t)\Big]_a^x - \int_a^x f'(t)\, G(t)dt.$$

Comme G *est borée et* f *tend vers* 0*, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que le second terme converge aussi, en vérifiant que*

$$\int_a^{+\infty} f'(t)\, G(t)dt \quad \text{est absolument convergente.}$$

On a :

$$\big|f'(t)\, G(t)\big| = \big|f'(t)\big|\, \big|G(t)\big| \leq \big(-f'(t)\big)\, M\ ,$$

car f *est décroissante (donc* $f'(t) \leq 0$*) et* $|G|$ *est bornée par* M*. Par le théorème de comparaison, il suffit donc de montrer que* $\int_a^{+\infty} -f'(t)dt$ *est convergente. Or :*

$$\int_a^x -f'(t)dt = f(a) - f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(a) - f(x)) = f(a)\ .$$

***Exemple* 18.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{est semi-convergente.}$$

Avec $f(t) = \frac{1}{t}$ *et* $g(t) = \sin t$*, on retrouve que l'inégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge.*
C'est une généralisation de l'exemple 18 *précédent.*

***Exemple* 19.** *Comme exemple d'application, si* α *est un réel strictement positif, et* k *un entier positif* impair, *alors l'intégrale*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt \quad \textit{converge.}$$

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$*. On vérifie que les hypothèses du théorème 2.1.6 sont satisfaites pour* $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ *et* $g(t) = \sin^k(t)$*. Pour s'assurer que la primitive de* $\sin^k$ *est bornée, il suffit de penser à une linéarisation, qui transformera* $\sin^k(t)$ *en une combinaison linéaire des* $\sin(\ell t)$*,* $\ell = 1, \ldots, k$*, dont la primitive sera toujours bornée.*

3
Équations différentielles linéaires

3.1 Introduction-définitions générales

Un corps de température θ_0 à l'instant $t = 0$ est placé dans un milieu de température a ($\theta_0 > a$). On demande de trouver la loi de variation de la température de ce corps en fonction du temps. La température cherchée est une fonction du temps que l'on désigne par $\theta(t)$. Du cours de physique on sait que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différencedes températures de ce corps et du milieu ambiant. La fonction $\theta(t)$ étant décroissante, d'après la signification mécanique de la dérivée, on obtient

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k\left[\theta(t) - a\right], \qquad (1)$$

où k est le coefficient de proportionnalité. La relation (1) est le modèle mathématique du processus physique étudié. La relation obtenue est une équation différentielle, car elle relie la fonction inconnue $\theta(t)$ à sa dérivée. L'équation différentielle (1) peut décrire d'autres phénomènes physiques. Pour $a = 0$ par exemple, elle décrit la désintégration de l'atome radioactif. La solution de l'équation (1) est immédiate : $\theta(t) = Ce^{-kt} + a$, où C est une constante arbitraire. On détermine cette constante à partir de la condition initale $\theta(0) = \theta_0$, soit $\theta_0 = C + a$. La solution cherchée est donc

$$\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-kt} + a.$$

Il est souvent impossible, lors de l'étude de phénomènes physiques, de trouver directement la loi reliant les variables indépendantes et la fonction cherchée. Par contre, on peut établir une relation entre cette fonction et ses dérivées, c'est à dire décrire le phénomène étudié par une équation différentielle. Plus précisemment une équation différentielle (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi *que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n. Par exemple, une telle équation pourrait être*

$$y'(t) = 2.y(t) \qquad (*)$$

ou

$$y = \frac{1}{2}x^2y" - 5x \qquad (**)$$

Dans le 2^{eme} exemple, il est sous-entendu que y est fonction de x. L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme

$$F(x, y, y'...y^{(n)}) = 0.$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une **solution** *d'une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset R$ est une fonction $y \in C^n(I;\ R)$ (une fonction $y :\to R$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x \in I$, on ait $F(x, y(x), y'(x), ...y^{(n)}(x) = 0$.*

***Exercice* 1.** *Vérifier que :*
- $y(t) = Ce^{2t}$ *est une solution de l'équation différentielle (*) sur tout $\mathbb{R}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé ;*
- $y(x) = mx^2 - 5x$ *est une solution de l'équation différentielle (**), sur $\mathbb{R}$, pour tout $m \in \mathbb{R}$.*

***Remarque* 3.1.** *: Pour des raisons qui seront développées dans la suite, on dit aussi "intégrer l'ED" au lieu de "trouver une solution de l'ED". Dans ce chapitre, on donnera des méthodes pour trouver l'ensemble de toutes les solutions à une certaine classe d'équations différentielles.*

***Exemple* 20.** *: $y" + y = 0$, $y = \sin x$ est solution car $y' = \cos x$ et $y'' = -\sin x$*

3.2 Equation différentielle du premier ordre

Définition *Une équation différentielle est du premier ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.*

3.2.1 Equation différenitelle à variables séparées

Définition *Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :*

$$f(y).y' = g(x) \qquad (vs).$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$*, puis, symboliquement*

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

On écrit ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $C \in \mathbb{R}$ *(qui est déjà implicitement présente dans les intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier. Il s'agit donc de trouver des primitives* F *et* G *de* f *et* g*, et ensuite d'exprimer* y *en terme de* x *et de* C *:*

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + C).$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi intégrer une équation différentielle.

Exemple 21. *Résoudre sur* $I =]1, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$xy'Ln(x) = (3Ln(x) + 1)y.$$

On peut séparer les variables (x *et* y*) en divisant par* $yxLn(x)$*, ce qui est permis si et seulement si* $y \neq 0$ *(car* $xLn(x) > 0$*) d'après l'énoncé). On a :*

$$\frac{y'}{y} = \frac{3Lnx + 1}{xLnx} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3Lnx + 1}{xLnx}dx + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$*. Soit (*$\frac{3Lnx+1}{xLnx} = \frac{3}{x} + \frac{1}{xLnx}$*)*

$$Ln|y| = 3Ln|x| + Ln|Lnx| + K = Ln|x^3 Lnx| + K.$$

Avec $K \in \mathbb{R}$*. En prenant l'exponentielle de cette expression, on a finalement :*

$$y = C_2 x^3 Lnx$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$ *: En effet, le signe de* $C_2 (=^+_- e^K)$ *tient compte des deux possibilités pour* $|y|$*, et on vérifie que* $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ *est aussi solution (mais pour laquelle le calcul précédent, à partir de la division par* y*, n'est pas valable.)*

Exemple 22. *: Résoudre*

$$2xydy = (x^2 - y^2)dx \qquad (1)$$

Posons : $f(x, y) = 2xy$*,* $g(x, y) = x^2 - y^2$*, on a :* $f(2x, 2y) = 4xy = 2^2xy$ *et* $g(2x, 2y) = 2^2(x^2 - y^2)$ *donc* f *et* g *sont homogène de degré 2. On pose* $y = vx$ *pour résoudre (1).* $dy = vdx + xdv$ *et (1) devient :*

$$\frac{2v}{1 - 3v^2}dv = \frac{dx}{x}.$$

Après intégration on obtient :

$$x^3(1-3v^2) = K, (K \in \mathbb{R})$$

d'où

$$x(x^2-3y^2) = K.$$

Soit

$$y = \pm\frac{1}{3}(x^3 - \frac{K}{x}.$$

Détermination de la constante d'intégration

La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donné, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. On parle d'un problème avec conditions initiales.

3.2.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition *Une équations différentielles linéaire (EDL) du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans K, K étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on demandera $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

Équation homogène *On appelle* équation homogène *ou encore* équation sans second membre *associée à (E), l'équation :*

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_0).$$

On la note aussi (E_h) ou $(E.H)$.

Remarque 3.2. *Si dans ces définitions, le coefficient de y' vaut 1 : on dit alors que l'équation est* normalisée *ou encore* résolue en y'.

Résolution de l'équation homogène associée

En effet, (E.H) est une équation différentielle à variables séparées. En l'écrivant

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

et en l'intégrant, on obtient :

$$Ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + C$$

et avec $K \in \{\pm e^C, 0\}$*, on a :*

$$y = Ke^{F(x)}, K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx.$$

Concernant l'équation (E), on a :

Propriété *L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).*

La section suivante est consacrée à la détermination de la solution particulière de l'équation (E) par la méthode de variation de la constante.

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$*, avec* K *une fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution si et seulement si*

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

(On peut intégrer car c'est la composée de fonctions continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de (E.H)). Une solution particulière est donc

$$y(x) = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

et la solution générale est donc :

$$y(x) = e^{F(x)}\big(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx\big), K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

***Exemple* 23.** *Résoudre sur* $I =]0, \frac{\pi}{2}[$*, l'équation différentielle*

$$sin(x)y' - cos(x)y = x$$

Résolvons d'abord sur I *l'équation homogène :*

$$sin(x)y' - \cos(x)y = 0$$

On obtient
$$\frac{y'}{y} = \frac{cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow Ln|y| = Ln|\sin x| + k, k \in \mathbb{R}.$$
La solution générale de (E.H) est donc

$$y = K \sin x, K \in \mathbb{R}.$$

(avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et K=0 étant solution aussi). Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x) \sin x, \textit{(K est continûment dérivable).}$$

On a alors $y'(x) = K'(x)\ sinx + K(x) \cos(x)$, ce qui donne dans (E) :

$$(\ sinx)[K'(x)\ sinx + K(x)\ cosx] - (\ cosx)K(x)\ sinx = x$$

et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$K'(x) \sin^2 x = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

On intègre par parties, en posant

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \ \textit{et} \ u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

ce qui donne :
$$K(x) = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx = -\frac{x}{\tan x}$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{cosx}{sinx} = -\frac{x}{\tan x} + \ Ln|\ sinx|.$$
Sur I, $sinx > 0$; une solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$.

$$y = -x\ cosx + \ sinx\ Ln\ sinx$$

et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = -x\ cosx + \big(K + \ sinx\ Ln\ sinx\big), K \in \ R.$$

Remarque 3.3. *: Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de (E.H), et la solution générale de (E) est*

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2), c \in \mathbb{R} \quad \textit{arbitraire.}$$

3.2.3 Equation différentielles du premier ordre non linéaires se ramenant à des équations différentielles linéaires

Équation de Bernouilli

Définition *Une équation différentielle est dite de Bernouilli si elle est de la forme :*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \qquad (Ber)$$

Pour résoudre l'équation (Ber) on pose $u = y^{1-n}$. *Cette substitution transforme l'équation (Ber) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable* u.

***Remarque* 3.4.** *: Si* $n = 1$*, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.*

Équations de Ricatti

Définition *Les équations de Ricatti sont des équations différentielles de la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (Ric)$$

méthode de résolution : *Si* y_1 *est une solution particulière alors on pose le changement de fonction suivant :*

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (Ric) en une équation linéaire en z.

Équations de Lagrange

Définition *Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :*

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (Lag)$$

Pour intégrer les équations de Lagrange, on pose $y' = p = \frac{dy}{dx}$*, (Lag) devient :*$y = xf(p) + g(p)$*, et on differentie :*

$$dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$$

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$$

$$(p - f(p))dx = [xf'(p) + g'(p)]\, dp.$$

On transformé (Lag) en une équation différentielle linéaire en $\frac{dx}{dp} = x'$.

Équations de la forme $y' = f(\frac{y}{x})$

On pose $y = tx$ *pour résoudre ce type d'équations différentielles.*

3.3 Equation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'interesse maintenant aux équations différentielles du deuxième ordre, mais seulement aux EDL où les coefficients a_0, a_1, a_2 *sont des constantes réelles.*

Définition *Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *et* f *une fonction continue sur* I *ouvert de* $\mathbb{R}$*. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est*

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(E.H)}$$

D'après les résultats généraux on sait que l'ensemble des solutions de (E.H) est un espace vectoriel et que la solution générale de (E) est la forme $y = y_p + y_h$*, où* y_p *est une solution particulière de (E) et* y_h *est une solution de (E.H). Nous admettons les résultats supplémentaires :*

Propriété *1. Pour tout* $x_0 \in I$ *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*, (E) admet une unique solution* y *telle que* $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$.
2. Les solutions de (E.H) sur I *forment un espace vectoriel de dimension* 2 *sur* $\mathbb{R}$*, noté* $S_2(I)$.
3.Si y_1, y_2 *sont deux solutions indépendantes de (E.H), alors* y_1, y_2 *est une base de* $S_2(I)$*, c'est à dire* $S_2(I) = \{\alpha y_1 + \beta y_2\}$.
4.Pour $y_1, y_2 \in S_2(I)$*, on définit* **le wronskien** $w : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Si $w(x_0) \neq 0$ *pour un* $x_0 \in I$*, alors* $w(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$*, et c'est une condition nécessaire et suffisante pour que* $\{y_1, y_2\}$ *soit linéairement indépendant et donc une base de* $S_2(I)$.

3.3.1 Résolution de l'équation homogène associée (E.H)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$*. On a donc* $y' = ry$ *et* $y'' = r^2y$*, donc (E) devient :* $y.(ar^2 + br + c) = 0$.

Définition *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E.C)$$

se nomme équation caractéristique de (E.H).

Propriété *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

$\bullet \Delta > 0$ *: L'équation caratéristique admet deux racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$, *et*

$$\boxed{y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}}$$

est une base de $S_2(I)$.

$\bullet \Delta = 0$ *: L'équation caratéristique admet une racine réelle double* r, *et*

$$\boxed{y_1(x) = e^{rx}, y_2(x) = xe^{rx}}$$

est une base de $S_2(I)$.

$\bullet \Delta < 0$ *: L'équation caratéristique admet deux racines complexes conjugués* $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$, *et*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x}$$

est une base de $S_2(I)$.
Dans chacun des cas, la solution générale de (E.H) est donc

$$y = Ay_1 + By_2,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Preuve : *Il est claire que dans chaque cas* $y_1(x), y_2(x)$ *sont solutions de (E.H). Pour vérifier qu'ils sont indépendantes il suffit d'après la proposition (1.4.1) de vérifier que leur wronskien est non nul. Par exemple dans le cas où* $\Delta > 0$, *le wronskien de* $y_1(x), y_2(x)$ *est*

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0.$$

Il est conseillé de traîter les deux autres cas à titre d'exercice.

3.3.2 Recherche d'une solution particulière de (E)

On distingue deux cas particuliers et une méthode générale :

cas particuliers

<u>Premier cas particulier :</u> *le second memebre de l'équation (E) est de la forme :*$f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $P(x) \in \mathbb{R}[X]$.
On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s Q(x)$*, où* Q *est un polynôme du même degré que le polynôme* P*, et l'entier* s *est choisi de la façon suivante.*
$s = 0$ *si* α *n'est pas racine de l'équation caractéristique.*
$s = 1$ *si* α *est l'une des racines de l'équation caractéristique.*
$s = 2$ *si* α *est racine double de l'équation caractéristique .*
Les coefficients du polynôme Q *sont déterminés par identification.*

***Remarque* 3.5.** *: Cette méthode s'applique notamment pour* $\alpha = 0$*, c'est à dire lorsque* $f(x) = P(x)$.
<u>Deuxième cas particulier :</u> *le second membre de l'équation (E) est de la forme :*$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\omega x$*, où* $\omega, \alpha \in \mathbb{R}, P$ *est un polynôme réel de degré* n.
On cherche la solution particulière sous la forme

$y(x) = e^{\alpha x}x^s\{Q(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x\}$*, où* Q *et* R *sont deux polynômes ayant le même degré que le polynôme* P*, et l'entier* s *est choisi de la façon suivante.*
$s = 0$ *si* $\alpha + i\beta$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique.*
$s = 1$ *si* $\alpha + i\beta$ *est une racine de l'équation caractéristique. (alors* $\alpha - i\beta$ *est aussi racine del'équation cartéristique). Les polynômes* Q *et* R *sont déterminés par identification.*

***Remarque* 3.6.** *: Toute solution de* $(E.H)$ *nulle en un point de* I *est identiquement nulle sur* I.

***Remarque* 3.7.** *: Deux solutions de* $(E.H)$ *qui coïncident en un point de* I*, sont identiques sur* I.

Méthode de variation des constantes.

Si $\{y_1, y_2\}$ *est une base de solutions de l'équation homogne , on cherche une solution particulière sous la forme* $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$*, mais cette fois* λ *et* μ *sont deux fonctions vérifiant :*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & \frac{f x)}{a}. \end{array}\right.}$$

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ *:*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ *sont* $\lambda\cos x + \mu\sin x$ *avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$$

avec cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ *sont des fonctions à trouver et qui vérifient :*

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \frac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x &= 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x &= \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ *et la seconde par* $\cos x$*, on obtient*

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu'(\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu'(\cos x)^2 &= 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1.$$

Ainsi $\mu(x) = x$ *et la première ligne des équations devient* $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ *donc* $\lambda(x) = \ln(\cos x)$*. donc les solutions sont de la forme :*

$$y_h + y_p = \lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

Principe de superposition :

Propriété *Si* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$*, une solution particulière est donnée par* $y = y_1 + y_2$*, où* y_i *est une solution de* $ay'' + by' + cy = f_i(x)$*.(pour* $i = 1, 2$*.)*

***Exemple* 24.** *Résoudre*

$$y'' + y = x + \cos 3x \ \text{ sur } \ I = \mathbb{R}$$

a.) L'équation Homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1$*. La solution générale de (E.H) est* $y = A\cos x + B\sin x$*.*
b.) solution particulière associée à $y" + y = x$*,* x *convient.*
c.) solution particulière associée à $y" + y = \cos 3x$*, : En remplaçant* $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ *dans l'équation, on trouve* $(A - 9A)\cos 3x + (B - 9B)\sin 3x = \cos 3x$*, donc* $A = -\frac{1}{8}$ *et* $B = 0$*.*
d.) conclusion : La solution générale est $y = x - \frac{1}{8}3x + A\cos x + B\sin x$*.*

4

Séries Numériques

4.1 Définitions et exemples

4.1.1 Définitions

Définition *On a appelle série numérique toute suite de la forme*

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

avec (u_n) une suite réelle.
On note $\sum u_n$ la série de terme général (u_n).
On appelle somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ le nombre S_n.
Si la suite (S_n) converge vers S, on dit que la série $\sum u_n$ converge de somme S et on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On appelle reste de rang p la différence $R_p = S - S_p$. Si la série n'est pas convergente, elle est divergente.

***Remarque* 4.1.** *les premiers termes de la série interviennent pour le calcul de S mais pas pour la convergence.*

4.1.2 Condition nécessaire de convergence

On a la relation pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Propriété *Si la série $\sum u_n$ converge, alors u_n converge vers 0. La réciproque est fausse.*

Preuve : *On a la relation pour tout entier $n \geq 1$:*

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Donc si la série $\sum u_n$ converge, la suite S_n converge vers S, on en déduit que la suite u_n converge vers $S - S = 0$.

***Remarque* 4.2.** *la réciproque est fausse.*
En effet on considère la série de terme général $1/n$ pour n non nul. Cette série est appelée la série harmonique. On note S_n la somme partielle, on a

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc si la série harmonique converge, alors la suite $S_{2n} - S_n$ converge vers 0 ce qui est impossible avec l'inégalité ci-dessus donc la série harmonique diverge et son terme général tend vers 0.

***Remarque* 4.3.** *On utilise surtout la contraposée de ce résultat c'est-à-dire si la suite u_n ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

4.1.3 Combinaisons linéaires de séries convergentes

Propriété *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers S et S' respectivement, alors pour tous réels λ et β la série $\beta \sum u_n + \lambda \sum v_n$ est convergente de somme $\beta S + \lambda S'$.*

Corollaire 4.1. *Si $\sum a_n$ **converge** mais $\sum b_n$ **diverge**, alors $\sum(a_n + b_n)$ diverge.*

4.1.4 Les restes d'une série

Définition *Si* $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ *est une série convergente, alors son* reste *à l'indice* $n \geq n_0$ *est la somme de la série (convergente)* $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

Les restes d'une série convergente *Soit* $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ *une série* ***convergente*** *et soit pour tout* $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Preuve :

Soit S *la somme de* $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ *et* $(S_n)_{n=n_0}^{\infty}$ *la suite associée. Alors* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *et pour tout* $n \geq n_0$, $S_n + R_n = S$.

4.1.5 Critère de Cauchy

Définition *On dit que la série* $\sum u_n$ *vérifie le* critère de Cauchy *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq N \ \forall q \geq p \text{ on a } \left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ *satisfait le critère de Cauchy si et seulement si la suite associée* $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, *satisfait le critère de Cauchy.*
Comme une suite numérique converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy, on a le théorème suivant.

Critère de Cauchy *Une série numérique* $\sum u_n$ *est convergente* ***si*** *et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.*

4.2 Séries à termes positifs

Définition *On dit que la série* $\sum u_n$ *est à termes positifs si* $u_n \geq 0$ *pour tout entier* n.

Propriété *La suite des sommes partielles (S_n) est croissante. Par conséquent la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) est majorée.*

Preuve : *on applique le théorème de la convergence monotone.*

Critères de comparaison *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs vérifiant*

$$0 \leq u_n \leq v_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n \tag{4.2}$$

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Preuve :
i) Évident.
ii) Posons $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, nous avons alors $0 \leq s_n \leq t_n$, donc

$$\sum_{n\geq 0} u_n \textit{ diverge } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty,$$

et par conséquent $\sum u_n$ diverge.

Théorème *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles positives équivalentes $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\right)$.*
Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration
Pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{2},$$

$$0 < \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

On applique ensuite le théorème précédent .

Exemple *: Montrons que la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et calculons sa somme.*

Nous avons $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ *donc* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge.*
Calculons la somme partielle s_n *de la série pout tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *on a alors*

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

En sommant toutes ces inégalités, nous obtenons $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et par conséquent*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} s_n = 1.$$

Remarque 4.4. *Deux séries dont les termes généraux sont équivalents sont de même nature mais n'ont pas la même somme.*
En effet, nous avons $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$*. Or, on montre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} > \frac{3}{2}$ *alors qu'on vient de voir que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Comparaison avec une intégrale *Soit* $f\colon [n_0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ ***décroissante*** *continue par morceaux. alors la série* $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ *sont de meme nature. Si l'intégrale* $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ ***converge****, alors pour tout* $n > n_0$,

$$\int_n^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{\infty} f(t)\,dt.$$

Démonstration
Il suffit d'étudier le cas ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Sans perte de généralité, supposons que* f *est décroissante. Alors* f *est positive.*

Pour $x \in [n, n+1]$, $n \geq n_0$, *on a* $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$*. Donc pour tous* $p \geq n_0$ *et*

$q \geq p$ tel que $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sum_{n=p+1}^{q+1} f(n) \leq \int_{p}^{q+1} f(t)\,dt \leq \sum_{n=p}^{q} f(n).$$

4.2.1 Séries de Riemann

Définition *Toute série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est dite* série de Riemann.

Convergence d'une série de Riemann *La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve : *Comparaison avec l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$.*

Règle de Riemann

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^{\alpha} u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ $(l < +\infty)$ alors la série de terme général u_n converge.*
2. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^{\alpha} u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l > \in 0$ alors la série de terme général u_n diverge.*

Exemples

1. $u_n = \dfrac{n^4 \ln 3n}{e^{2n}}$.
Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} u_n = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *et donc en particulier pour* $\alpha > 1$.

2. $u_n = \frac{e^{-2n}+n}{n^3+1} = \frac{n(1+\frac{e^{-2n}}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} = \frac{1+\frac{e^{-2n}}{n}}{n^2(1+\frac{1}{n^3})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

3. $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{1993}}$.
Le terme général u_n tend vers 0, mais u_n n'a pas d'équivalent simple. Nous avons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $n^{\alpha} u_n = \dfrac{n^{\alpha}}{n(\ln n)^{1993}}$ *mais la limite dépend de α :*

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} u_n = \begin{cases} 0 & si\ \alpha \leq 1 \\ +\infty & si\ \alpha > 1 \end{cases}.$$

La série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ *est de même nature que* $\left(\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1993}}\right)_n$.

$$\begin{aligned}
\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1993}} &= \int_2^n f'(x)(f(x))^{-1993}dx \text{ où } f(x)=\ln x \\
&= \left[\frac{f(x)^{-1992}}{-1992}\right]_2^n \\
&= \frac{f(n)^{-1992}}{-1992} - \frac{f(2)^{-1992}}{-1992} \\
&= -\frac{1}{1992}\left(\frac{1}{(\ln n)^{1992}} - \frac{1}{(\ln 2)^{1992}}\right),
\end{aligned}$$

et par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1993}} = \frac{1}{1992(\ln 2)^{1992}}$, *donc* $\sum u_n$ *converge.*
On peut également utiliser une méthode plus simple par changement de variable. Soit $\ln x = v$, $dv = \frac{dx}{x}$, *alors*

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1993}} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dv}{(v)^{1993}}.$$

On reconnait ici une intégrale de Riemann qui est donc convergente puisque $1993 > 1$.
4. $\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = v_n$. *Nous avons alors*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha v_n = \lim_{n\to+\infty} n^{(\alpha-\frac{3}{2})}\ln n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{si } \alpha < \frac{3}{2}, \text{ en particulier pour tout } \alpha \in]1,\frac{3}{2}[. \end{cases}$$

On en déduit donc que la série $\sum v_n$ *converge et comme* $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ *converge.*

4.2.2 Séries de Bertrand

Séries de Bertrand *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ *converge* si et seulement si $(\alpha > 1)$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

4.2.3 Règle de Cauchy

Règle de Cauchy *Soit* $\sum a_n$ *une série numérique. On pose*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} |u_n|^{1/n}.$$

Alors

1. *si* $\lambda < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge absolument,*
2. *si* $\lambda > 1$, *la série* $\sum a_n$ *diverge grossièrement.*

Preuve : *1. Supposons* $\lambda < 1$. *Soit* $\mu < 1$ *tel que* $\mu > \lambda$. *Soit* N *tel que* $\forall n \geq N$ $|u_n|^{1/n} \leq \mu$. *Alors* $\forall n \geq N$ $|u_n| \leq \mu^n$.

2. Supposons $\lambda > 1$. *Soit* N *tel que* $\forall n \geq N$ $|u_n|^{1/n} \geq 1$. *Alors* $\forall n \geq N$ $|u_n| \geq 1$.

4.2.4 Règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert *Soit* $\sum a_n$ *une série numérique vérifiant* $a_n \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$. *Posons*

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}.$$

Alors

1. *si* $l < 1$, *la série* $\sum a_n$ *converge absolument,*
2. *si* $l > 1$, *la série* $\sum a_n$ *diverge .*

Preuve :

1. Supposons $l < 1$. *Soit* $\mu < 1$ *tel que* $\mu > L$. *Soit* N *tel que* $\forall n \geq N$ $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \mu$. *Alors, par récurrence sur* n, $\forall n \geq N$ $|u_n| \leq |u_N| \mu^{n-N} = \frac{|u_N|}{\mu^N}\mu^n$.

2. Supposons $\lambda > 1$. *Soit* N *tel que* $\forall n \geq N$ $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1$. *Alors, par récurrence sur* n, $\forall n \geq N$ $|u_n| \geq |u_N|$.

4.3 Séries a termes réels de signe quelconques

4.3.1 Absolue convergence

Définition *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Propriété *Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse*

Preuve : *on remarque que $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ et on utilisele critère de Cauchy.*
Exemple :
La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.
La réciproque est fausse : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$., en effet $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

4.3.2 Séries alternées

Définition On dit q'une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général $u_n = (-1)^n v_n$ où $v_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Propriété Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée. Si la suite u_n est décroissante et convergente vers 0, alors la série alternée converge.

Preuve : on considère la suite des sommes partielles S_n. On prouve que S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes. On en déduit la convergence de S_n.

4.3.3 Théorème d'Abel

Grace au critère de Cauchy, on démontre le résultat suivant.

Règle d'Abel Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui converge vers 0. Soit (b_n) une suite de réels telle que les sommes partielles de la série de terme général b_n soient bornées. Alors, la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

***Remarque* 4.5.** Ce théorème redonne comme cas particulier (avec $b_n = (-1)^n$) le critère spécial des séries alternées.

Exemple Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$, les sommes partielles de la série de terme général $b_n = e^{in\theta}$ vérifient

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

donc, pour tout entier n

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{2}{2|\sin(\theta/2)|}.$$

On peut donc appliquer la règle d'Abel aux séries (de Fresnel) :

$$\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \qquad \sum_n \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}, \qquad \sum_n \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$$

qui sont convergentes pour tout $\alpha > 0$.

4.4 Produit de Cauchy

Théorème Si on considère deux séries de nombres réels de termes généraux u_n, v_n, on appelle produit de Cauchy la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série w_n est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

4.5 Exercices

Exercice 1

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

   a) $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$,

   b) $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$,

   c) $\sum \frac{n^2}{n^4+1}$,

   d) $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

   e) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

   f) $\sum \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$,

   g) $\sum 2^n$,

   h) $\sum \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$,

   i) $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

   j) $\sum \frac{1}{n!}$,

   k) $\sum \frac{n^{100000}}{n!}$,

   l) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$,

   m) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$,

   n) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

5

Suites de fonctions

5.1 Convergence simple et convergence uniforme

5.1.1 Définitions de convergence

Convergence simple

Soient E un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$.

Définition On dit que (f_n) *converge simplement* sur E si et seulement si, pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas on définit une nouvelle fonction $f : E \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in E$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, et on dit que (f_n) *converge simplement sur* E *vers* f.

Autrement dit, (f_n) converge simplement sur E vers f si et seulement si $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de x et ϵ) tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N. \tag{5.1}$$

Exemple $E = [0,1], f_n(x) = x^n$. On a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$, et $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Donc x^n converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{pour} \quad x = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

Remarquons que, dans cet exemple, les fonctions $f_n(x) = x^n$ sont continues, mais la limite f ne l'est pas. (Pourquoi ?)

Convergence uniforme

Définition Soient E un ensemble, A une partie de E (qui peut être E tout entier), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f une fonction sur E a valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que (f_n) *converge vers f uniformément sur A* si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{5.3}$$

Autrement dit, (f_n) converge vers f uniformément sur A si et seulement si $\forall\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N, \tag{5.4}$$

c'est à dire

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N, \forall x \in A. \tag{5.5}$$

***Remarque* 5.1.**

– La difference principale entre la convergence simple et la convergence uniforme est que, dans la formulation de la convergence uniforme le nombre N ne dépend pas de la variable x tandis que dans la formulation de la convergence simple N peut dépendre de x.

– En pratique, on commence par déterminer la limite simple f (si on a convergence uniforme vers f alors f est la limite simple de la suite), et on étudie l'écart $|f_n - f|$ sur A en le majorant par une suite qui tend vers 0, ou si cela n'est pas immédiat, en étudiant les variations de $|f_n - f|$ sur A.

Exemple Reprenons l'exemple précédent : $E = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ sur E, $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.
(i) Montrons que f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1[$. Prenons $t_n = 2^{-1/n}$ $(n \geq 1)$; on a $t_n \in [0, 1[$ et $f_n(t_n) - f(t_n) = (2^{-1/n})^n = 1/2$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(t_n) - f(t_n)| = 1/2 > \epsilon$ si on prend par exemple $\epsilon = 1/3$.
(ii) Pour les mêmes fonctions, prenons maintenant $A = [0, a]$ avec $0 < a < 1$ et montrons que f_n converge uniformément vers f sur A. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\leq x\leq a} |x^n| = a^n$. Comme la suite a^n tend vers 0 quand $n \to \infty$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $a^n \leq \epsilon$ (on peut prendre $N = 1+$ la partie entière de $\frac{\log\epsilon}{\log a}$ si $\epsilon < 1$). Donc $\forall\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq a^n \leq \epsilon$.

Propriété Soient E un ensemble, (f_n) une suite de fonctions sur E et f une fonction sur E. Si f_n converge uniformément vers f sur E alors f_n converge simplement vers f sur E.

La démonstration est triviale.

5.2 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

5.2.1 Continuité

Théorème Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si de plus les f_n sont continues en x_0, alors f est continue en x_0.

Preuve.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}\ \forall n \geq N$. f_n étant continue en x_0, il vient :

$$\exists \eta > 0 : x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Il vient alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, donc f est continue en x_0.
On utilise assez fréquemment la contraposée d'une de ces propositions pour montrer qu'une suite de fonctions continues sur I ne converge pas uniformément sur I. Par exemple, on montre que la limite simple n'est pas continue.

Exemple Reprenons l'exemple avec $f_n = x^n$ sur $[0,1]$, $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Les fonctions f_n sont continues mais la limite f n'est pas continue en 1, ce qui prouve que la convergence n'est pas uniforme. En effet, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Corollaire 5.1. *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.*

5.2.2 Intégration

Théorème Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt. \tag{5.6}$$

Preuve. Admis

5.2.3 Dérivation

Théorème Soient I un intervale de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications continûment dérivables $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose :
(i) $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $g : I \to \mathbb{R}$.
(ii)$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ou (Il existe $x_0 \in I$ tel que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$.)
On définit $f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t)dt$. Alors (f_n) converge simplement sur I vers f et $f' = g$.

Preuve. Soit $x \in I$; on a $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$. L'intervalle $[x_0, x]$ étant fermé borné, il résulte du théorème précédent que $\int_{x_0}^x f'_n(t)dt$ converge vers $\int_{x_0}^x g(t)$. Avec (ii) il en résulte que $f_n(x)$ converge vers $l + \int_{x_0}^x g(t)dt = f(x)$.

5.3 Exercices

Exercice 1

1. On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Ces suites convergent-elles simplement sur $[0, 1]$?
   b) Convergent-elles uniformément sur $[0, 1]$? Sur $]0, 1]$? Convergent-elles uniformément sur $[1/2, 1]$?
   c) Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$?

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [0, +\infty[\to [0, 1]$ définies par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

   a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0, 1]$.

   b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

6

Séries de fonctions

6.1 Convergence simple et convergence uniforme

Soient E un ensemble et (u_n) une suite de fonctions sur E. On veut définir la somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Définition Soit A une partie de E. On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge simplement* (resp., *uniformément*) sur A si et seulement si la suite associée de fonctions $(S_n(x))$, où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, converge simplement (resp. uniformément), vers une fonction $S(x)$ sur A, et dans ce cas on écrit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (\forall x \in A). \tag{6.1}$$

Lemme 6.1. *1. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série simplement convergente de fonctions sur E. Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = S(x) - S_n(x)$ le reste d'ordre n de la série. Alors $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ $\forall x \in E$.*

2. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $A \subset E$ si et seulement si la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur A.

La démonstration est triviale

Définition $\sum f_n$ est dite *uniformément absolument convergente* sur A si et seulement si la série $\sum |f_n|$ est uniformément convergente sur A.

Convergence normale

Définition La série $\sum f_n$ est dite *normalement convergente sur* A s'il existe une série convergente $\sum v_n < +\infty$ à termes dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq v_n.$$

Propriété Soit $\sum f_n$ normalement convergente sur A. Alors $\sum f_n$ est absolument uniformément convergente sur A et donc uniformément convergente sur A.

Preuve. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{a \in A} \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} \sup_{x \in A} |f_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} v_{n+k},$$

et puisque $\sum v_n$ vérifie le critère de Cauchy. Puis on applique la Proposition uniforme de Cauchy.

En pratique : on essaie d'abord de prouver la convergence normale. Pour cela, on cherche un majorant v_n de $\|f_n\|_\infty$ tel que la série numérique $\sum v_n$ converge (si on ne trouve pas un majorant de manière simple, on étudie les variations de f_n).

Lorsqu'il n'y a pas convergence normale mais convergence simple de la série de fonctions, l'écart $S_n(x) - S(x)$ est égal à $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Pour établir la convergence uniforme de la série de fonctions, il faut montrer que la suite $(\|R_n\|)_\infty$ tend vers 0.

6.2 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

6.2.1 Continuité

Théorème Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergentes uniformément sur I vers une fonction $S : I \to \mathbb{R}$.
(i) Si toutes les fonctions f_n sont continues en x_0, alors S est continue en x_0.
(ii) Si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, alors S est continue sur I.

Exemple
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est continue.
3. Étudier la monotonie de S.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent à S en 0.

Solution

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. On a $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

   est bien définie
2. Les f_n sont continues sur $]0; +\infty[$. Soit $a > 0$,

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n + n^2 a} \sim \frac{1}{n^2}$$

   donc la série $\sum f_n(x)$ est normalement converge sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$
   On peut donc conclure que Sest continue.

6.2.2 Intégration

Théorème Soient $[a, b]$, $a < b$, un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions intégrables bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $S(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$, alors S est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(t)dt. \tag{6.2}$$

Exemple
Soit

$$\psi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)$$

Justifier et calculer

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution
ona

$$\psi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$$

or pour $x\in[0,1]$ on a $|\frac{2x}{n^2-x^2}|\leq\frac{2}{n^2-1}$ donc la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$$

est normalement converge donc d'après le théorème précédent on peut permeter l'intégrale et la somme

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_0^1\frac{1}{n-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x\right)$$

donc

$$\sum_{n=2}^{N}\left(\int_0^1\frac{1}{n-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=2}^{N}\left(ln(\frac{n}{n-1})-ln(\frac{n+1}{n})\right)=ln(N)-ln(N+1)+ln(2)$$

ainsi

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\left(ln(N)-ln(N+1)+ln(2)\right)=ln(2)$$

6.2.3 Dérivation

Théorème Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continûment dérivables $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose :
(i) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers $\varphi : I \to \mathbb{R}$.
(ii) Il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ soit convergente.
Alors l'application $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est dérivable et on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t). \tag{6.3}$$

Exemple
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. Calculer $f'(x)$.

Solution

1. Pour $x \in]-1,1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.
   Soit $x \in]-1,1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)| \leq |x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n \geq 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

   $$f \text{ est définie sur }]-1,1[.$$

   Soit $a \in]0,1[$. Chaque f_n, $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et pour $x \in [-a,a]$,

   $$f'_n(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

   Pour $x \in [-a,a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

   Puique la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geq 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$.
   En résumé,
   - la série de fonctions de terme général f_n, $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $[-a,a]$,
   - chaque fonction f_n, $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$,
   - la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[-a,a]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout réel a de $]0, 1[$ et donc sur $]-1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)).$$

6.3 Exercices

Exercice 1

1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :
   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, sur $[0, +\infty[$, puis sur $]1, +\infty[$, puis sur $[2, +\infty[$.
   b) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, 50]$.
   c) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$ sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.
   a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^4}$.
   d) Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 1 + \sin(2x) + \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin(mx)}{m^4}$.
   a) Montrer que cette fonction est bien définie, c'est à dire que la série converge simplement sur $[0, \pi]$.
   b) Converge-t-elle uniformément ?

Exercice 2

On considère la série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i. Montrer que pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, mais pas sur $[0, +\infty[$.

ii. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

iii. Montrer que la somme de cette série est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.