SMIA 1

ANALYSE 1

FONCTIONS REELLES :

Limite, Continuité et Dérivabilité

Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Hamam_Abdallah Maths stackexchange.com
a.hammam@fs.umi.ac.ma

Table des matières

$\boxed{\text{Toutes les remarques par e-mail, venant de votre part seront les bienvenues.}}$

Chapitre 1

Limite d'une fonction réelle

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Domaine de définition

Une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une correspondance entre chaque élément x de $\mathbb{R}$ avec un élément de $\mathbb{R}$ noté $f(x)$ qui représente l'image de x.

Une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une application d'une partie de $\mathbb{R}$, appelée "domaine de définition" notée en général D_f vers l'ensemble $\mathbb{R}$.

En d'autres termes

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) \text{ existe } \}.$$

Dans la plupart des cas qui nous intéressent, le domaine de définition D_f est un intervalle I. L'ensemble $\{f(x), \ \ x \in D_f\}$ est appelé ensemble image de la fonction f.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ a pour domaine de définition $D_f = [1, +\infty[$.

L'ensemble image de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - 3$ sera alors $[-3, +\infty[$

1.1.2 Fonction croissante

On dit qu'une fonction f est croissante sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff \ (\forall (x, y) \in A^2) \quad x \neq y \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

<u>Conséquence</u>

Si f est croissante sur A, alors

$$\boxed{(\forall (x, y) \in A^2) \ \Big(x < y \implies f(x) \leq f(y)\Big)}$$

1.1.3 Fonction Strictement croissante

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur une partie $A \subset D_f$

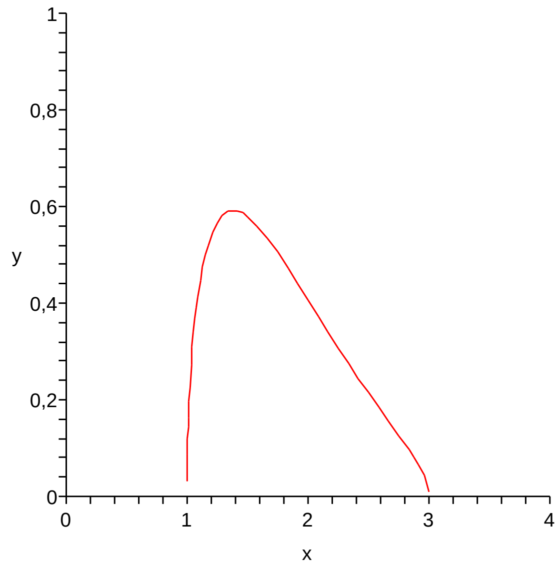

Figure 1.1 – Le domaine de cette fonction est $[1,3]$.

$$\iff (\forall (x,y) \in A^2) \quad x \neq y \implies \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

Conséquence
Si f est strictemeent croissante sur A, alors

$$\boxed{(\forall (x,y) \in A^2) \ \left(x < y \implies f(x) < f(y)\right)}$$

1.1.4 Fonction décroissante

On dit qu'une fonction f est décroissante sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff (\forall (x,y) \in A^2) \quad x \neq y \implies \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$$

Conséquence
Si f est décroissante sur A, alors

$$\boxed{(\forall (x,y) \in A^2) \ \left(x < y \implies f(x) \geq f(y)\right)}$$

1.1.5 Fonction Strictement décroissante

On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff (\forall (x,y) \in A^2) \quad x \neq y \implies \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$$

Conséquence
Si f est strictement décroissante sur A, alors

$$\boxed{(\forall(x,y)\in A^2)\ \Big(x<y \implies f(x)>f(y)\Big)}$$

1.1.6 Fonction majorée

On dit qu'une fonction f est majorée sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff (\exists M\in\mathbb{R})\ :\ (\forall x\in A)\quad f(x)\leq M$$

1.1.7 Fonction minorée

On dit qu'une fonction f est minorée sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff (\exists m\in\mathbb{R})\ :\ (\forall x\in A)\quad f(x)\geq m$$

1.1.8 Fonction bornée

On dit qu'une fonction f est bornée sur une partie $A \subset D_f$

$$\iff (\exists (m,M)\in\mathbb{R}^2)\ :\ (\forall x\in A)\quad m\leq f(x)\leq M$$

$$\iff (\exists K\in\mathbb{R}^+)\ :\ (\forall x\in A)\quad |f(x)|\leq K$$

1.1.9 Fonction paire-impaire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si

$$(\forall x\in D_f)\quad -x\in D_f \text{ et } f(-x)=f(x)$$

Exemple

$$f(x)=x^2,x^4,\cos(x),|x|,e^{x^2},....$$

Graphiquement, la courbe représentative de f admet l'axe $\overrightarrow{Oy}$ comme axe de symétrie.
On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si

$$(\forall x\in D_f)\quad -x\in D_f \text{ et } f(-x)=-f(x)$$

Exemple

$$f(x)=x^3,x^5,\sin(x),\arctan(x),....$$

Graphiquement, la courbe représentative de f admet le point $(0,0)$ comme centre de symétrie.

Remarque
La fonction $x\mapsto x^2-3x$ n'est ni paire, ni impaire.

1.1.10 Fonction périodique

On dit que la fonction f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si

$$(\forall x \in D_f) \quad x + T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Exemple

$$f(x) = (\sin(x), T = 2\pi), (\cos(4x), T = \frac{\pi}{2}), (tg(x), T = \pi), ...$$

1.2 Limite d'une fonction en un point d'accumulation

1.2.1 Point d'accumulation

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que a est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de a rencontre A en au moins un point autre que a.

On écrit alors

$$a \in A' \iff (\forall \eta > 0) \ \Big]a - \eta, a + \eta\Big[\ \cap \ (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulation de A, appelé ensemble dérivé de A est noté A'.

Un élément de A qui n'est pas un point d'accumulation, est un POINT ISOLE.

Exemples

$A = [0, 1[$ $a = 0$ $b = 1$, a et b sont des points d'accumulation de A.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $a = 1$, a n'est pas un point d'accumulation de A. C'est un point isolé.

1.2.2 Définitions de la limite

La notion de limite d'une fonction est essentielle en Analyse.

Elle permet de définir la continuité, la dérivabilité, la convergence d'une intégrale généralisée ...

Définition de la limite quand x tend vers a en étant différent

Soit f une fonction réelle dont $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation du domaine de définition D_f. On dit que $f(x)$ tend vers le réel L et on écrit $\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = L$ si et seulement si

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall x \in D_f) \ 0 < |x - a| < \eta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Définition de la limite quand x tend vers a à droite

Soit f une fonction réelle dont $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation du domaine de définition D_f. On dit que $f(x)$ tend vers le réel L et on écrit $\lim_{x \to a, x > a} f(x) = L$ si et seulement si

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall x \in D_f) \ 0 < x - a < \eta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Définition de la limite quand x tend vers a à gauche

Soit f une fonction réelle dont $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation du domaine de définition D_f. On dit que $f(x)$ tend vers le réel L et on écrit $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = L$ si et seulement si

$$(\forall \epsilon > 0) \;\; (\exists \eta > 0) \;:\; (\forall x \in D_f)$$

$$0 < a - x < \eta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Définition de la limite quand x tend vers $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0) : (\forall x \in]\eta, +\infty[\cap D_f) \;\; |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \eta < 0) : (\forall x \in]-\infty, \eta[\cap D_f) \;\; |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0) : (\forall x \in]\eta, +\infty[\cap D_f) \;\; f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall \epsilon < 0)(\exists \eta > 0) : (\forall x \in]\eta, +\infty[\cap D_f) \;\; f(x) < \epsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \eta < 0) : (\forall x \in]-\infty, \eta[\cap D_f) \;\; f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall \epsilon < 0)(\exists \eta < 0) : (\forall x \in]-\infty, \eta[\cap D_f) \;\; f(x) < \epsilon$$

UNIFICATION DES DEFINITIONS DE LA LIMITE

Il s'agit de remplacer toutes les définitions données juste avant, par UNE SEULE DEFINITION qui engloberait tous les cas traités ci-desssus ainsi que la définition de la limite d'une suite.

$$\boxed{\text{Soit } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; A \subset D_f, \; a \in A' \subset D'_f \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ et } L \in \overline{\mathbb{R}}}$$

ON DIT QUE $f(x)$ TEND VERS L QUAND x TEND VERS a , ET ON ECRIT

$$\boxed{\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L \iff (\forall V \in \mathcal{V}(L)) \;\; (\exists U \in \mathcal{V}(a)) \;\; : \;\; f(U \cap A) \subset V}$$

Type de limite	en quel point d'accumulation	l'ensemble A correspondant
$\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x)$	$a\in\mathbb{R}$	$D_f-\{a\}$
$\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$	$a\in\mathbb{R}$	$D_f\cap]a,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$	$a\in\mathbb{R}$	$D_f\cap]-\infty,a[$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$a\in\mathbb{R}$	D_f
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	$+\infty$	D_f
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	$-\infty$	D_f
$\lim\limits_{n\to +\infty} u_n$	$+\infty$	$\mathbb{N}$

1.2.3 Unicité de la limite

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a\in D'_f$.
Supposons que

$$\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)=L_1 \text{ et } \lim_{x\to a, x\neq a} f(x)=L_2.$$

On supposera que $(a,L_1,L_2)\in\mathbb{R}^3$ sachant que la démonstration est semblable dans les autres cas.

Soit $\epsilon>0$ quelconque donné.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_1 \implies (\exists\eta_1>0)\ :\ (\forall x\in D_f)\ \ 0<|x-a|<\eta_1 \implies |f(x)-L_1|<\epsilon.$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_2 \implies (\exists\eta_2>0)\ :\ (\forall x\in D_f)\ \ 0<|x-a|<\eta_2 \implies |f(x)-L_2|<\epsilon.$$

Posons $\eta=\min(\eta_1,\eta_2)$.

$$a\in A' \implies]a-\eta,a+\eta[-\{a\}\cap D_f\neq\emptyset.$$

Soit $c\in]a-\eta,a+\eta[-\{a\}\cap D_f$.
On a alors

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(c) + f(c) - L_2| < 2\epsilon$$

On en déduit que $L_1 = L_2$.

1.2.4 Limites Usuelles Très Utiles

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{tg(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0, x> 0} x\ln(x) = 0.$$

$$(\forall \alpha > 0) \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

1.2.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}, \quad A \subset D_f, \quad a \in A' \subset \overline{\mathbb{R}} \quad \text{et } L \in \overline{\mathbb{R}}.$
On a alors

$$\boxed{\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L \iff (\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}) \ : \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L}$$

Qui se traduit par
$f(x)$ tend vers L quand x tend vers a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers L.
Démonstration

$$\boxed{\Longrightarrow}$$

Supposons que $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L$.

Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.
Montrons, en utilisant la définition de la limite que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
Soit alors V un voisinage quelconque donné de L.

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L \implies (\exists U \in \mathcal{V}(a)) \;\; f(U \cap A) \subset V$$

d'autre part

$$U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = a \implies \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \;\; : (\forall n \geq N) \;\; x_n \in U$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \;\; : (\forall n \geq N) \;\; x_n \in U \cap A$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \;\; : (\forall n \geq N) \;\; f(x_n) \in V$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

$\boxed{\text{réciproquement : } \Leftarrow}$

Nous Supposerons que $(a, L) \in \mathbb{R}^2$, sachant que la démonstration est similaire dans les autres cas $(a, L) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
Partons de l'hypothèse

$$(\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}) \;\; : \;\; \lim_{n\to+\infty} x_n = a \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$$

et montrons que $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L$.
Montrons la contraposée.

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) \neq L \quad \implies$$

$$(\exists \epsilon > 0) \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (\exists x_n \in A) \;\; : \;\; |x_n - a| < \frac{1}{n+1} \text{ et } \quad |f(x_n) - L| \geq \epsilon \implies$$

$$(\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}) \;\; : \;\; \lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ et } \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq L$$

CQFD.
Remarque

1. La caractérisation séquentielle est intéressante lorsque l'on veut montrer que la limite d'un fonction en un certain point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **n'existe pas**. Il suffit alors de trouver une suite (u_n) telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \text{ n'existe pas}$$

Ou deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$$

L'exemple le plus classique serait

$$f(x) = \sin(x), \quad a = +\infty, \quad u_n = n\pi, \quad v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

2. La caractérisation séquentielle de la limite est à la base de caractérisation séquentielle de la continuité, Très utile pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires ainsi que le théorème de la borne.
3. En fin, la caractérisation séquentielle de la limite permet de démontrer les critères de Cauchy, Oh ! combien importants en analyse.
4. La caractérisation séquentielle de la limite sert aussi à profiter des propriétés sur les limites des suites pour les transposer aux propriétés (ci-dessous)des limites de fonctions.

1.2.6 Opérations sur les limites de fonctions

Les fonctions f et g sont supposées avoir, au voisinage de a, des limites finies ou infinies.

1. Valeur absolue

$$\boxed{\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|}$$

La démonstration est basée sur la deuxième forme de l'inégalité trangulaire :

$$\Big||f(x_n)| - |L|\Big| \leq \Big|f(x_n) - L\Big|.$$

2. Somme

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)}$$

La démonstration découle de l'inégalité triangulaire :

$$|(f(x_n) + g(x_n)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x_n) - L_1| + |g(x_n) - L_2|.$$

3. Produit

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)}$$

4. Quotient

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}}$$

5. Formes Indéterminées

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}.}$$

1.3 Le Passage à la limite

Le PASSAGE à la limite permet de déduire des propriétés sur la limite d'une fonction f en un point, connaissant

les propriétés de $f(x)$ dans un voisinage de ce point.

Inversement, le RETOUR dde la limite permet de déduire des propriétés de la fonction au voisinage d'un point, connaissant les propriétés de sa limite en ce point.

Toutes les propositions énoncées dans cette section, se démontrent aisément en utilisant le raisonnement par l'absurde.

1.3.1 Le Passage à la limite en a^+

$$(\forall x \in]a, a+\eta[) \quad f(x) > 0) \implies \lim_{x \to a^+} f(x) \geq 0$$

Conséquence immédiate

$$(\forall x \in]a, a+\eta[) \quad f(x) > g(x)) \implies \lim_{x \to a^+} f(x) \geq \lim_{x \to a^+} g(x)$$

Remarque Lorsque l'on passe à la limite, les inégalités STRICTES deviennent LARGES.

1.3.2 Le Passage à la limite en a^-

$$(\forall x \in]a-\eta, a[) \quad f(x) > 0) \implies \lim_{x \to a^-} f(x) \geq 0$$

1.3.3 La Règle de l'encadrement ou des Gendarmes

$$(\forall x \in]a, a+\eta[) \quad g(x) < f(x) < h(x) \text{ et } \lim_{x \to a^+} h(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

$$\implies \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Cette règle est aussi valable quand $x \to a, x \neq a$ et quand $x \to a^-$.

1.4 Le Retour de la limite

Connaissant les propriétés de la limite d'une fonction en un point a, le retour consiste à déduire des propriétés sur la fonction , du moins, au voisinage du point a.

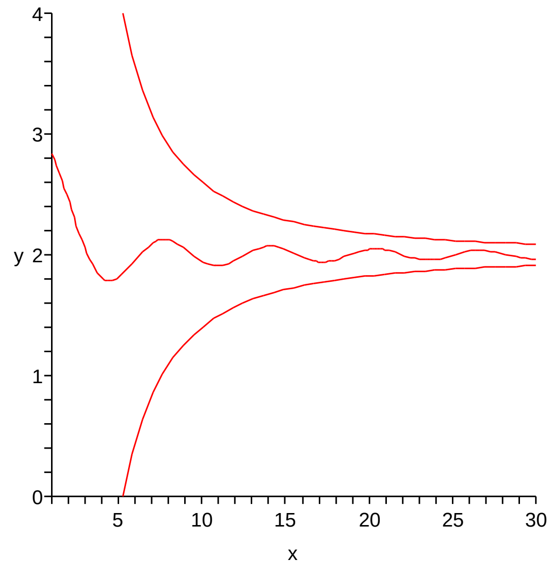

FIGURE 1.2 – La règle du Gendarme pour les fonctions

1.4.1 Le retour de la limite à droite

$$displaystyle \lim_{x\to a^+} f(x) > 0 \implies (\exists \eta > 0) \quad : \quad (\forall x \in]a, a+\eta[) \quad f(x) > 0$$

La démonstration se fait en utilisant la DEFINITION de la limite et en prenant

$$\epsilon = \frac{\lim_{x\to a^+} f(x)}{2}.$$

1.4.2 Le retour de la limite à gauche

$$\lim_{x\to a^-} f(x) > 0 \implies (\exists \eta > 0) \quad : \quad (\forall x \in]a-\eta, a[) \quad f(x) > 0$$

1.4.3 Le retour de la limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) > 0 \implies (\exists A > 0) \quad : \quad (\forall x \in]A, +\infty[) \quad f(x) > 0$$

1.4.4 Le retour de la limite en $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) > 0 \implies (\exists B < 0) \quad : \quad (\forall x \in]-\infty, B[) \quad f(x) > 0$$

1.5 Critère de Cauchy de la limite en a

C'est un critère théorique qui permet de prouver l'existence d'une limite finie, sans avoir à connaître sa valeur.

1.5.1 Cas où a est fini

$$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff$$
$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ :\ \ (\forall (x,y) \in]a-\eta, a+\eta[\cap D_f)\ \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow \text{ la condition est nécessaire}}$

Supposons que $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = L \in \mathbb{R}$ et montrons que

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ :\ \ (\forall (x,y) \in]a-\eta, a+\eta[\cap D_f)\ \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = L \in \mathbb{R} \implies (\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ L - \frac{\epsilon}{2} < f(x) < L + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies (\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x, y \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ L - \frac{\epsilon}{2} < f(x) < L + \frac{\epsilon}{2}\ \text{ et }\ -L - \frac{\epsilon}{2} < -f(y) < -L + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies (\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x, y \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ \ -\epsilon < f(x) - f(y) < \epsilon$$

$$\implies (\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x, y \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$\boxed{\Longleftarrow\text{: la condition est suffisante.}}$

Pour la réciproque, nous aurons besoin de la caractérisation séquentielle de la limite.
Supposons que

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x, y \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

et montrons que $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) \in \mathbb{R}$.
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.
Soit $\epsilon > 0$.
Par hypothèse,

$$(\exists \eta > 0)\ :\ (\forall x, y \in]a-\eta, a+\eta[\cap A)\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \implies (\exists N\in\mathbb{N})\ :\ (\forall n\geq N)\ x_n \in]a-\eta, a+\eta[$$

$$\implies (\exists N\in\mathbb{N})\ :\ (\forall p,q\geq N)\ \ |f(x_p)-f(x_q)|<\epsilon$$

$$\implies (f(x_n)) \text{ est une suite réelle de Cauchy}$$

$$\implies (f(x_n)) \text{ est convergente.}$$

1.5.2 $\boxed{\textbf{Cas où } a=+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R} \iff$$
$$(\forall\epsilon>0)\ \ (\exists A>0)\ \ :\ \ (\forall (x,y)\in]A,+\infty[\cap D_f)\ \ |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

1.5.3 $\boxed{\textbf{Cas où } a=-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\in\mathbb{R} \iff$$
$$(\forall\epsilon>0)\ \ (\exists B<0)\ \ :\ \ (\forall (x,y)\in]-\infty,B[\cap D_f)\ \ |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

Chapitre 2

La continuité des fonctions réelles

2.1 Définition de la continuité

Soit f une fonction réelle avec D_f comme domaine de définition et $a \in D_f$.

1. On dira que f est continue au point $a \iff$

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = f(a)$$

2. On dira que f est continue à gauche du point $a \iff$

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

3. On dira que f est continue à droite du point $a \iff$

$$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \iff (\forall (x_n) \in {D_f}^{\mathbb{N}}) \ : \ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \qquad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)}$$

Qui se traduit par
f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de D_f qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.
Remarques

4. On dira que f est continue sur $A \subset \mathbb{R} \iff$

$$f \text{ est continue en tout point } a \text{ de } A \iff$$

$$(\forall a \in A) \ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

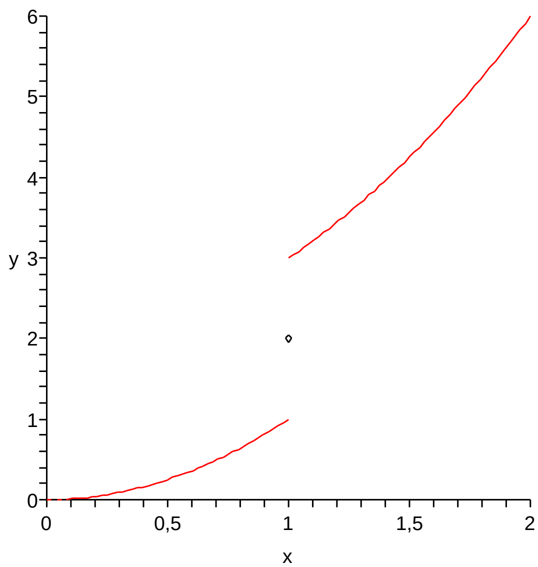

FIGURE 2.1 – Cette fonction n'est pas CONTIINUE en 1.

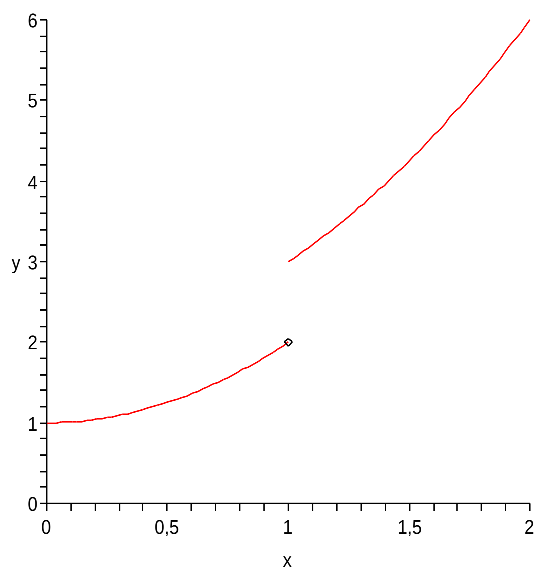

FIGURE 2.2 – La fonction n'est pas continue à droite de $x = 1$.

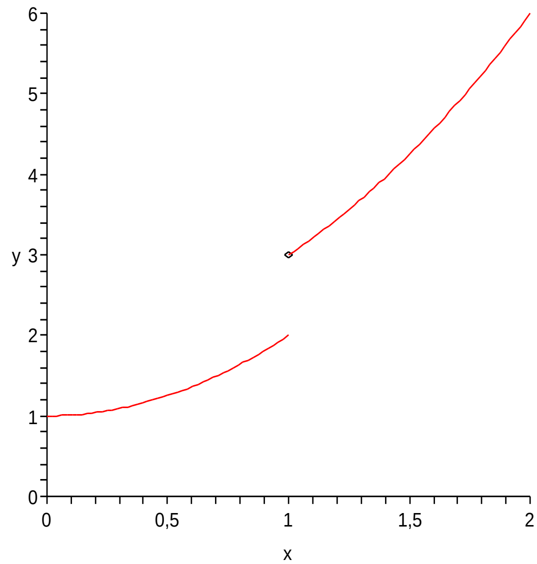

FIGURE 2.3 – La fonction n'est pas continue à gauche de $x = 1$.

5. On dira que f est continue sur $[a, b] \iff$
   f est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b.

Remarques

1. f est continue en point $a \iff f$ est continue à droite et à gauche du point a.
2. f est continue sur un ensemble si elle est continue en tout point de cet ensemble.
3. Les fonctions usuelles polynômiales, cosinus, sinus, arctangente, exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction logarithme $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
5. Les fractions rationnelles sont continues là où le dénominateur ne s'annule pas.

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.

$$\boxed{f \textit{ continue sur } [a, b] \textit{ et } f(a)f(b) < 0 \implies (\exists c \in]a, b[) \ : \ f(c) = 0}$$

Démonstration

Soit f une application continue sur le segment $[a, b]$ avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.
Considérons l'ensemble $E = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) > 0\}$.
d'une part, $f(a) > 0 \implies E \neq \emptyset$,
d'autre part,

$$E \subset [a, b] \implies E \text{ est borné}$$

D'après Le TFAR, E admet une borne supérieure $c \in [a, b]$.

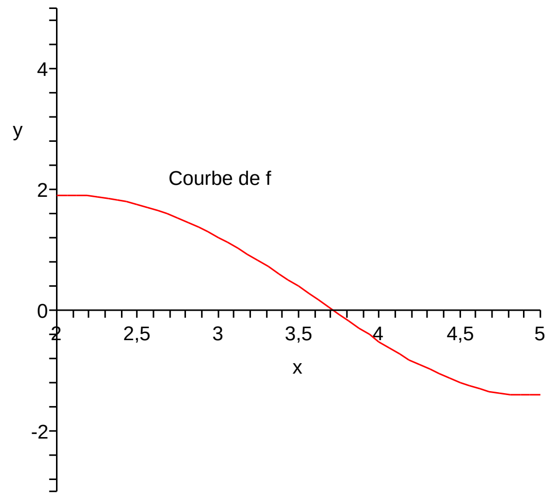

FIGURE 2.4 – TVI : il existe au moins une solution de $f(x) = 0$

La caractérisation séquentielle de la borne supérieure, permet d'écrire

$$c = \sup E \implies (\exists (e_n) \in E^{\mathbb{N}}) \quad : \ c = \lim_{n \to +\infty} e_n.$$

La caractérisation séquentielle de la continuité, permet d'écrire

$$c = \lim_{n \to +\infty} e_n \text{ et } f \text{ continue en } c \implies f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(e_n)$$

La comparaison des limites après passage donne

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f(e_n) > 0 \text{ et } f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(e_n) \implies f(c) \geq 0$$

$$\implies c < b.$$

D'autre part,
Pour n assez grand $c < c + \frac{1}{n} < b$ et

$$c + \frac{1}{n} \notin E$$

$$f(c + \frac{1}{n}) \leq 0 \text{ et } f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(c + \frac{1}{n}) \implies f(c) \leq 0$$

Finalement

$$\underline{f(c) \geq 0 \text{ et } f(c) \leq 0 \implies f(c) = 0}$$

2.3.1 Théorème des valeurs extérieures

Théorème 2. *Si une application continue sur un intervalle I, atteint deux valeurs v_1 et v_2, alors elle atteint toute valeur v comprise entre v_1 et v_2.*

$$\boxed{(\forall (v_1, v_2) \in f(I)^2\ (\forall v \in]v_1, v_2[)\ (\exists u \in I) \quad : \quad f(u) = v}$$

Démonstration

Soient $(v_1, v_2) \in f(I)$ avec $v_1 < v_2$ et $v \in]v_1, v_2[$.

$$(v_1, v_2) \in f(I) \implies (\exists (u_1, u_2) \in I^2_; \ : \ f(u_1) = v_1 \text{ et } f(u_2) = v_2.$$

Considérons l'application $F : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(x) - v$.

I est un intervalle $\implies [u_1, u_2] \subset I$.

f est continue sur $I \implies f$ est continue sur $[u_1, u_2] \implies F$ est continue sur $[u_1, u_2]$.

D'autre part,

$$F(u_1) = f(u_1) - v = v_1 - v < 0 \text{ et } F(u_2) = f(u_2) - v = v_2 - v > 0.$$

D'après le TVI,

$$(\exists u \in]u_1, u_2[) \quad : \quad F(u) = 0 \text{ ou bien } f(u) = v$$

Remarque

Le théorème précédent peut être énoncé comme suit

$$\boxed{\text{L'image d'un INTERVALLE par une application CONTINUE est un INTERVALLE}}$$

2.3.2 Théorème de la bijection

Théorème 3.

$$\boxed{f \textit{ continue et strictement monotone sur l'intervalle } I \implies f \textit{ est une bijection de } I \textit{ sur } f(I)}$$

Démonstration f étant une surjection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. l'injectivité de f est assurée par la stricte monotonie. On se retrouve alors dans l'une des situations suivantes :

<u>f est strictement croissante</u>

Intervalle I	Son image J
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
$]a,b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)]$
$[a,b[$	$[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)[$
$]a,b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$

f est strictement décroissante

Intervalle I	Son image J
$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)[$

Corollaire 4. *Si f est continue et strictement monotone sur le segment $[a,b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation*
$f(x) = 0$ admet UNE SEULE SOLUTION dans l'intervalle $]a,b[$.

2.4 Continuité uniforme et Théorème de Heine

Définition 5. Soit f une application réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur $A \iff$

$$\boxed{(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0)\ \ :\ \ (\forall (x,y) \in A)\ \ (|x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)}$$

Géométriquement parlant, la courbe représentative d'une fonction uniformément continue est LOCALEMENT HORIZONTALE tandis que

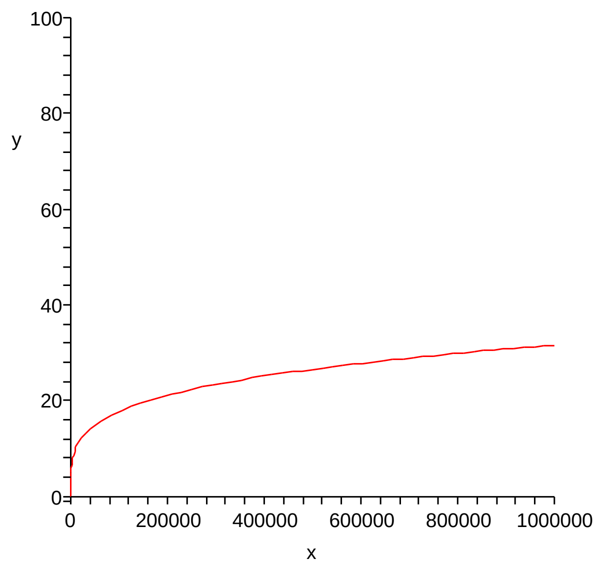

FIGURE 2.5 – Courbe horizontale : fonction uniformément continue

la courbe d'une fonction NON uniformément continue est plûtot LOCALEMENT VERTICALE.

2.4.1 Continuité uniforme et continuité

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur } A \implies f \text{ continue sur } A}$$

Démonstration

Supposons maintenant que f est uniformément continue sur A . Soit $a \in A$. Pour montrer que f est continue en a, utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit (x_n) une suite d'élément de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Soit alors $\epsilon > 0$ quelconque donné, de préférence petit.

f uniformément continue sur $A \quad \implies$

$$(\exists \eta > 0) \quad : \quad (\forall (x,y) \in A) \ \ (|x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

d'autre part,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n > N) \ |x_n - a| < \eta$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n > N) \ \ |f(x_n) - f(a)| < \epsilon.$$

CQFD.

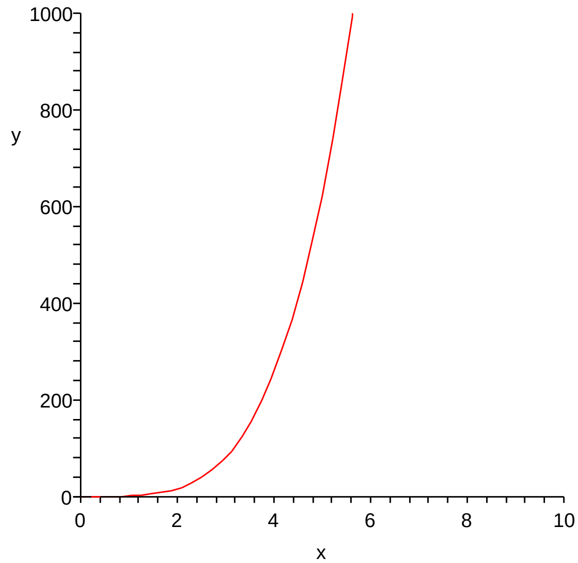

FIGURE 2.6 – Courbe verticale : fonction NON uniformément continue

2.4.2 Caractérisation séquentielle de continuité uniforme

$$\boxed{f \text{ est UC sur } A \iff (\forall (x_n, y_n) \in A^{\mathbb{N}}) \ : \lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \quad \lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0}$$

Démonstration

$$\boxed{\Longrightarrow \quad \text{la condition est nécessaire}}$$

Supposons que f soit uniformément continue sur $A \in \mathbb{R}$.
Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de A telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.
Soit $\epsilon > 0$.

$$f \text{ Uniformément Continue sur} A \implies (\exists \eta > 0) \ :$$

$$(\forall (x, y) \in A^2) \ : \ |x - y| < \eta \ \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ :$$

$$(\forall n \geq N) \ : \ |x_n - y_n| < \eta$$

$$\implies (\exists N \in \mathbb{N}) \ : (\forall n \geq N) \ : \ |f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow\text{: la condition est suffisante}}$

On raisonne par l'absurde comme pour démontrer le théorème ci-après.

2.4.3 Théorème de Heine

Théorème 6.

$$\boxed{f \text{ est continue sur le segment } [a,b] \implies f \text{ est Uniformément continue sur } [a,b]}$$

Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, c'est à dire que

$$(\exists \epsilon > 0) \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ (\exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2) \ \ :$$
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

(x_n) et (y_n) sont alors deux suites d'éléments du segment $[a,b]$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstarss, elles admettent des sous-suites convergentes $(x_{\phi(n)})$ et $(y_{\psi(n)})$ avec

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} \in [a,b]$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\psi(n)} \in [a,b]$$

Or

$$|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}| < \frac{1}{\phi(n)}$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\phi(n)}$$

$$\implies f(\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)}) = f(\lim_{n\to+\infty} y_{\phi(n)})$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{\phi(n)})$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} \Big(f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})\Big) \underline{= 0}.$$

D'autre part, on a

$$(\forall n > 0) |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \implies$$

$$(\forall n > 0) |f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \epsilon \implies$$

$$\lim_{n\to+\infty}|f(x_{\phi(n)})-f(y_{\phi(n)})|\underline{\geq \epsilon} \implies 0\geq \epsilon.$$

D'où la contradiction. Il s'en suit que f est uniformément continue sur A.

Remarque

Nous aurons besoin de ce théorème (de Heine) au cours du semestre 2 pour montrer qu'une fonction continue sur un segment est Intégrable au sens de Riemann.

2.4.4 Prolongement d'une fonction uniformément continue

C'est une condition nécessaire, dont on peut profiter pour montrer qu'une fonction n'est pas Uniformément Continue.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application définie sur $[a, b[$. Alors

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur } [a,b[\implies \lim_{x\to b, x<b} f(x)\in\mathbb{R}}$$

Démonstration

Encore une fois, utilisons la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit (b_n) une suite de $[a, b[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = b \implies (b_n) \text{ est une suite de Cauchy de } [a,b[$$

$$(b_n) \text{ est une suite de Cauchy et } f \text{ uniformément continue sur } [a,b[\implies$$

$$(f(b_n)) \text{ est une suite de Cauchy de } \mathbb{R} \text{ qui est complet } \implies$$

$$(f(b_n)) \text{ est convergente.}$$

Posons

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \alpha.$$

Vérifions que α ne dépend que de la suite (b_n).

Soit alors (c_n) est une autre suite qui converge vers b.

D'après la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(c_n - b_n) = 0 \text{ et } f \text{ uniformément continue sur } [a,b[\implies$$

$$\lim_{n\to+\infty}(f(c_n) - f(b_n)) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(c_n) = \lim_{n\to+\infty}(b_n) = \alpha.$$

Nous avons donc montré que

$$\forall (b_n)\in [a,b[^{\mathbb{N}}\colon \lim_{n\to+\infty} b_n = b \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \alpha$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{x\to b, x<b} f(x) = \alpha$$

On peut donc prolonger f par continuité au point b en posant $f(b) = \alpha$.

Remarque

La contraposée de l'implication ci-dessus permet de dire que

Si f est une application continue sur l'intervalle borné semi ouvert $[a, b[$ ne peut être prolongée par continuité à gauche de b, alors elle n'est pas uniformément continue sur $[a, b[$.

Par exemple $x :\mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas UC sur $]0, 1]$ car non prolongeable en 0^+.

Le prolongement ci-dessus, montre que qu'une fonction uniformément continue sut un INTERVALLE BORNE, est nécessairement bornée.

La fonction $x :\mapsto \ln(x)$ n'est pas bornée sur l'intervalle $]0, 1]$. Par conséquent, elle n'est pas uniformément continue sur cet intervalle.

2.5 Fonctions Lipschitziennes

Définition 7. Soit f une application réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que f est Lipschitzienne sur $A \iff$

$$(\exists K \in \mathbb{R}^+) \quad : \quad (\forall (x, y) \in A) \;\; |f(x) - f(y)| < K|x - y|$$

Si $0 \leq K < 1$, f est dite CONTRACTANTE.

Si $K > 1$, elle est dite DILATANTE.

Propriété 8. *Toute fonction Lipschitzienne sur un ensemble est Uniformément continue sur cet ensemble.*

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

2.6 Théorème de la borne

Théorème 9.

$$\boxed{\textit{si } f \textit{ est continue sur le segment } [a, b], \textit{ alors } f \textit{ est bornée et atteint ses bornes.}}$$

Démonstration

Montrons d'abord que f est bornée sur $[a, b]$.

Encore une fois, raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.

c'est à dire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (\exists x_n \in [a, b]) \quad : \quad |f(x_n)| > n.$$

(x_n) est alors une suite d'éléments du segment $[a, b]$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (x_n) admet une sous suite $x_{\phi(n)}$ convergente.

Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\phi(n)} = L \in [a, b]$.

On a alors, d'une part, grace à la caractérisation séquentielle de la continuité en L,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(L) \in \mathbb{R}$$

et de l'autre

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = +\infty$$

car

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; f(x_{\phi(n)}) \geq \phi(n) \geq n \text{ et}$$

Ce qui montre la contradiction.

Chapitre 3

Dérivabilité des fonctions réelles

3.1 Définitions

3.1.1 Dérivabilité en un point non isolé du domaine de définition

Soit f une fonction réelle et a un point du domaine de définition D_f, non isolé.

On dit que f est dérivable au point a $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } (= L \in \mathbb{R})$$

On écrira alors $f'(a) = L$.

Géométriquement parlant, f est dérivable au point a si la courbe représentative de f admet une tangente au point $(a, f(a))$. L'équation de cette tangente est alors donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque Importante

$$\boxed{f \text{ dérivable en } a \implies f \text{ est continue en } a.}$$

Donc, avant d'étudier le dérivabilité d'une fonction en un point, IL FAUT s'assurer qu'elle est CONTINUE.

3.1.2 Dérivabilité à droite

Soit f une fonction réelle et a un point du domaine de définition D_f, non isolé.

On dit que f est dérivable à droite du point a $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } (= L \in \mathbb{R})$$

On écrira alors $f'(a^+) = f'_d(a) = L$.

Géométriquement parlant, f est dérivable à droite du point a si la courbe représentative de f admet une demi-tangente au point $(a, f(a))$. L'équation de cette demi-tangente est alors donnée par

$$y = f'(a^+)(x - a) + f(a)$$

3.1.3 Dérivabilité à gauche

Soit f une fonction réelle et a un point du domaine de définition D_f, non isolé.

On dit que f est dérivable à gauche du point $a \iff$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } (= L \in \mathbb{R})$$

On écrira alors $f'(a^-) = f'_g(a) = L$.

Géométriquement parlant, f est dérivable à gauche du point a si la courbe représentative de f admet une demi-tangente au point $(a, f(a))$. L'équation de cette demi-tangente est alors donnée par

$$y = f'(a^-)(x - a) + f(a)$$

Remarque

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \iff f \text{ est dérivable à gauche et à droite de } a \text{ et } f'(a^-) = f'(a^+)}$$

Exemple classique

Considérons la fonction $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.

D'un autre côté, on a

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Donc f est dérivable à gauche de 0 et $f'_d(0) = -1$.

Mais f n'est PAS dérivable en 0.

Remarques

– On dira que f est dérivable sur $A \subset \mathbb{R} \iff$
  f est dérivable en tout point de A.
– On dira que f est dérivable sur $[a, b] \iff$
  f est dérivable sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b.

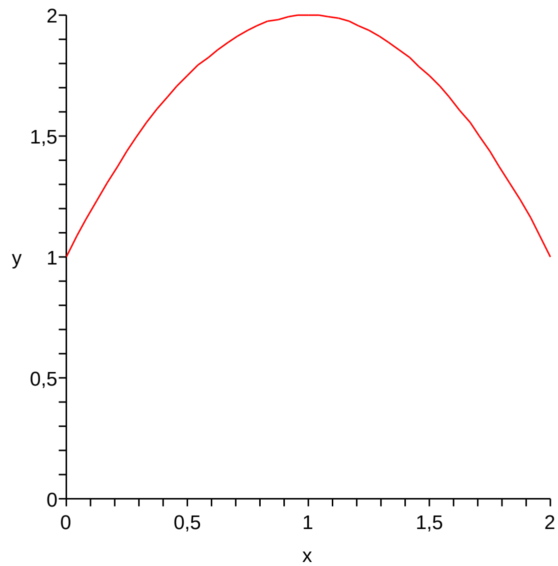

FIGURE 3.1 – Cette fonction est dérivable sur $[0, 2]$.

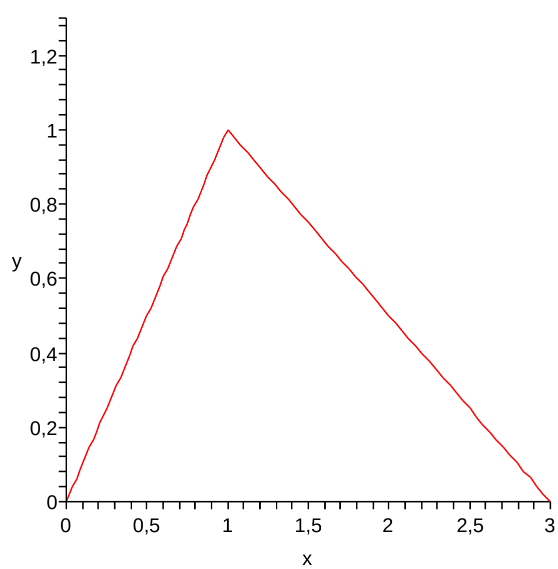

FIGURE 3.2 – Cette fonction n'est pas dérivable en 1.

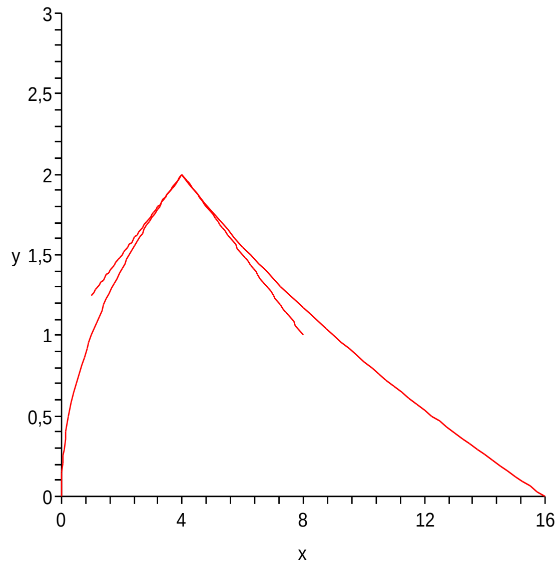

FIGURE 3.3 – Il y a deux demi-tangentes au point $(4, f(4))$.

3.1.4 Dérivées Usuelles

Fonction	Sa dérivée
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$tg(x)$	$(1+tg^2(x))$
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Et plus généralement, si u est une fonction de x, alors

Fonction	Sa dérivée
$\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1}$	$u(x)^n u'(x)$
$u(x)^n$	$nu(x)^{n-1}u'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{u(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Fonction	Sa dérivée
$\sin(u(x))$	$\cos(u(x))u'(x)$
$\cos(u(x))$	$-\sin(u(x))u'(x)$
$tg(u(x))$	$(1+tg^2(u(x)))u'(x)$
$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos(u(x))$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$arctg(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$sh(u(x))$	$ch(u(x))u'(x)$
$ch(u(x))$	$sh(u(x))u'(x)$
$th(u(x))$	$(1-th^2(x))u'(x)$
$argsh(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$
$argch(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$
$argth(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1-th^2(u(x))}$

3.2 Opérations sur les Dérivées

3.2.1 Dérivée de la somme

Si f et g sont dérivables en a, alors la somme $f+g$ est dérivable en a et de plus

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

3.2.2 Dérivée du produit

Si f et g sont dérivables en a, alors le produit fg est dérivable en a et de plus

$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}$$

3.2.3 Dérivée de quotient

Si f et g sont dérivables en a, et $g(a) \neq 0$ alors le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et de plus

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}}$$

3.2.4 Dérivée de la composée

Si f est dérivable en a, et g dérivable en $f(a)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et de plus

$$\boxed{(gof)'(a) = g'(f(a))f'(a)}$$

3.2.5 Dérivée de la réciproque

Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ et que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et de plus

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

3.3 Fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques

3.3.1 Fonctions Hyperboliques

Le Cosinus Hyperbolique (ch)

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

C'est une fonction paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, c'est le sinus hyperbolique.

Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Il est bon de remarquer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; ch(x) \geq 1$

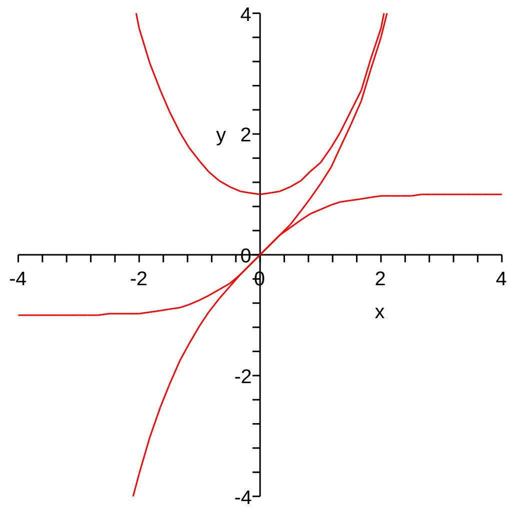

FIGURE 3.4 – Les fonctions ch, sh, et th .

Le Sinus Hyperbolique (sh)

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

C'est une fonction impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, c'est le cosinus hyperbolique.

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La Tangente Hyperbolique (th)

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$$

C'est une fonction impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; th'(x) = 1 - th^2(x) > 0$$

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il est bon de remarquer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -1 < th(x) < 1$

3.3.2 Lien entre Formules Trigonométriques et Formules Hyperbolique

Formule Trigonométrique	Formule Hyperbolique
$\cos$	ch
$\sin$	$\frac{sh}{i}(i^2 = -1)$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$	$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$	$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$
$1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$

3.3.3 Fonctions trigonométriques inverses

l'Arcsinus

La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est continue et strictement coissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle réalise alors une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = \cos(x)$
f' s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$.
La fonction réciproque f^{-1}, notée *Arcsin* est définie de $[-1, 1]$ vers $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\begin{aligned}(\forall x \in]-1,1[)\ \ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

l'Arccosinus

La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est continue et strictement décoissante sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Elle réalise alors une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = -\sin(x)$
f' s'annule en 0 et π.
La fonction réciproque f^{-1}, notée *Arccos* est définie de $[-1, 1]$ vers $[0, \pi]$.
f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et

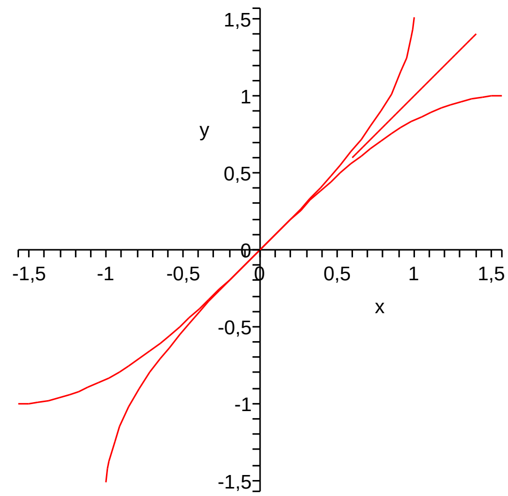

FIGURE 3.5 – Les fonction sinus et Arcsinus.

$$(\forall x \in]-1,1[) \;\; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

l'Arctangente

La fonction $f : x \mapsto tg(x)$ est continue et strictement coissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle réalise alors une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; f'(x) = 1 + tg^2(x)$
f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
La fonction réciproque f^{-1}, notée $Arctg$ est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + tg^2(arctg(x))}$$
$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

3.3.4 Fonctions Hyperboliques inverses

l'Argsh

La fonction $f : x \mapsto sh(x)$ est continue et strictement coissante $\mathbb{R}$.
Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

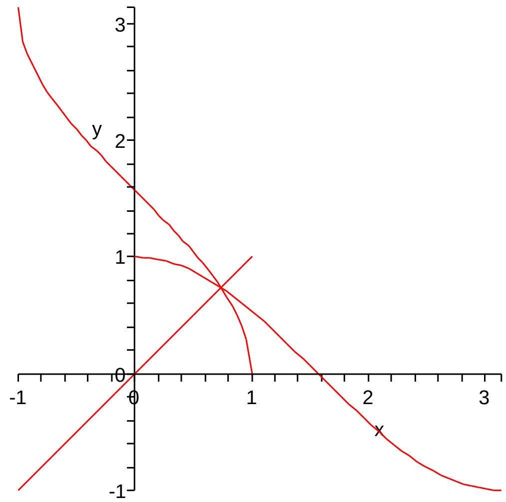

FIGURE 3.6 – Les fonction Cosinus et Arccosinus.

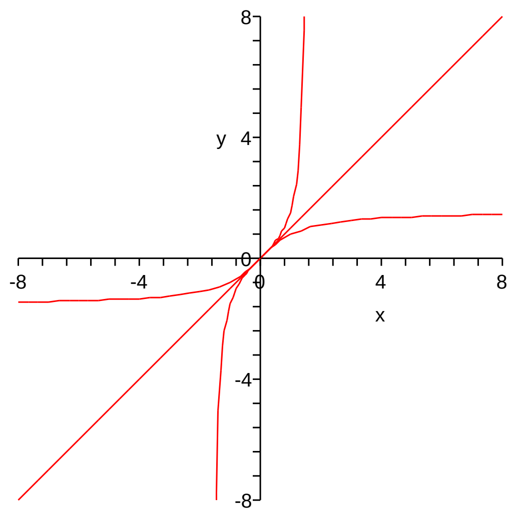

FIGURE 3.7 – Les fonction Tangente et Arctangente.

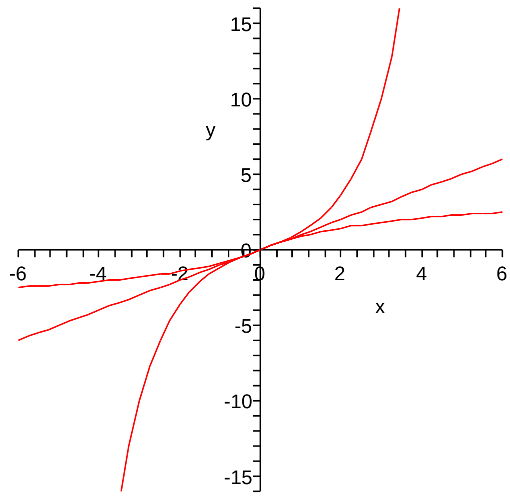

FIGURE 3.8 – Les fonction sh et Argsh.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = \cos(x)$
f' ne s'annule en sur $\mathbb{R}$.
La fonction réciproque f^{-1}, notée $Argsh$ est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{ch(argsh(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(argsh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

l'Argument ch : Argch

La fonction $f : x \mapsto ch(x)$ est continue et strictement coissante $\mathbb{R}^+$.
Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}^=$ sur $[1, +\infty[$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ f'(x) = sh(x)$
f' annule en $0 = f^{-1}(1)$.
La fonction réciproque f^{-1}, notée $Argch$ est définie de $[1, +\infty$ vers $\mathbb{R}^+$.
f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{sh(argch(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ch^2(argch(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

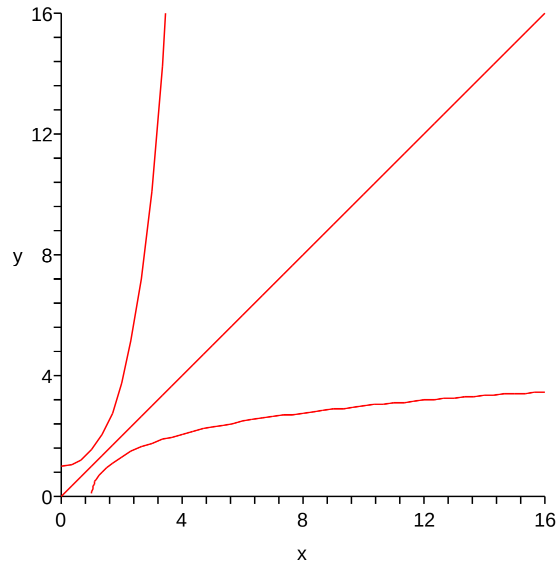

FIGURE 3.9 – Les fonction Ch et ArgCh.

l'Argument th : Argth

La fonction $f : x \mapsto th(x)$ est continue et strictement coissante $\mathbb{R}$.
Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}^{=}$ sur $]-1,1[$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = 1 - th^2(x)$
f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
La fonction réciproque f^{-1}, notée $Argth$ est définie de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$.
f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})\ \ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(1 - th^2(argth(x)))} \\ &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

3.3.5 Théorème de Rolle

Théorème 10.

$$\boxed{f\ \textit{continue sur}\ [a,b], f\ \textit{dérivable sue}\ ]a,b[\ \textit{et}\ f(a) = f(b) \implies (\exists c \in]a,b[\ :\ \ f'(c) = 0)}$$

Démonstration

Si f est constante sur $[a,b]$, alors la dérivée de f est nulle sur $]a,b[$ et n'importe quel $c \in]a,b[$ conviendra.

On supposera donc que f n'est pas une application constante.
f est continue sur $[a,b] \implies f$ est bornée et atteint ses bornes m et M.
L'une des deux bornes est atteinte en un point α, $\neq a$ et $\neq b$, c'est à dire que $\alpha \in]a,b[$.

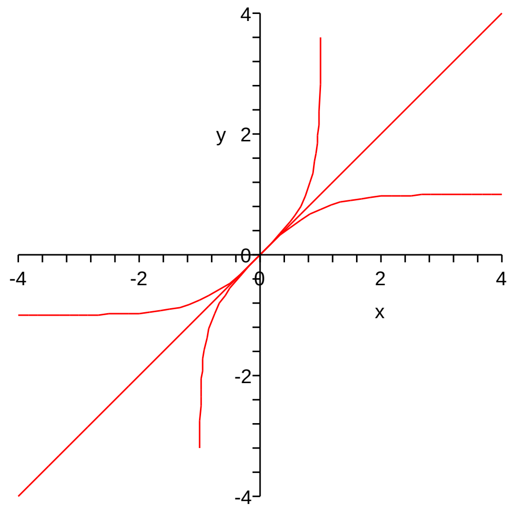

FIGURE 3.10 – Les fonction Th et Argth.

Sans perdre de généralité, on suppose que $f(\alpha) = M$.
On a alors

$$(\forall x \in]a, \alpha[) \quad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$$

donc, si l'on fait tendre x vers α^-, $f'(\alpha^-) \geq 0$.
de même,

$$(\forall x \in]\alpha, b[) \quad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$$

donc, si l'on fait tendre x vers α^+, $f'(\alpha^+) \leq 0$.
Or f est dérivable au point α, il s'en suit que

$$f'(\alpha) = f'(\alpha^-) = f'(\alpha^-) = 0.$$

CQFD.
Exemple d'utilisation
Considérons l'équation dans $\mathbb{R}$: $x^5 + x - 1 = 0$. Posons $f(x) = x^5 + x - 1$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in_R)$ $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$.
Or $f(0)f(1) = -1$, Donc il y a une seule solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

3.3.6 Le Théorème des Accroissements Finis : TAF

Théorème 11.

$$\boxed{f \textit{ continue sur } [a,b], f \textit{ dérivable sue }]a,b[\Longrightarrow (\exists c \in]a,b[: \ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)}$$

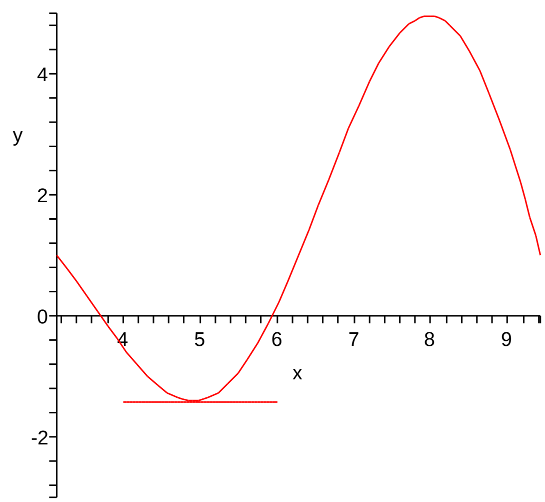

FIGURE 3.11 – Th de Rolle : il existe un point où la tangente est HORIZONTALE.

Démonstration
Soit f une application continue sur le fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$.
Considérons l'application F définie sur $[a,b]$ par

$$(\forall t \in [a,b]) \;\; F(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$$

On a alors
- F est continue sur $[a,b]$
- F est dérivable sur $]a,b[$
- $F(a) = F(b)$

Donc, d'après le théorème de Rolle

$$(\exists c \in]a,b[) \quad : \quad F'(c) = 0$$

Or

$$(\forall t \in]a,b[) \quad F'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Donc

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

CQFD.

Corollaire 12. *Soit f une application dérivable sur un intervalle I.*

$$\boxed{(\forall x \in I) \;\; f'(x) = 0 \iff \quad f \text{ est constante sur } I.}$$

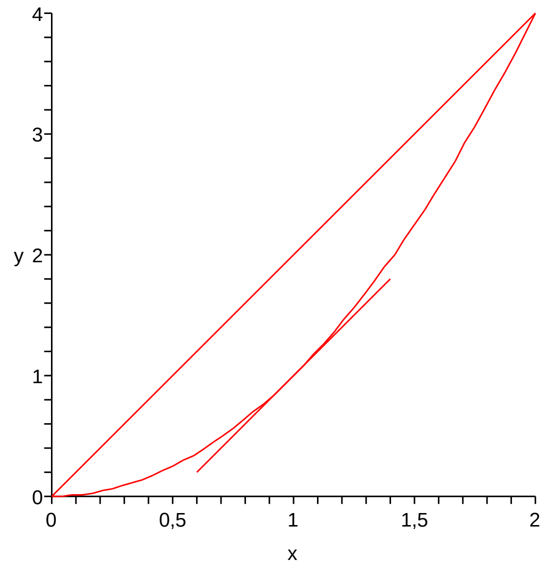

FIGURE 3.12 – TAF : il existe un point où la tangente est parallèle à la CORDE.

$$\boxed{(\forall x \in I)\ \ f'(x) \geq 0 \iff \quad f \ \textit{est croissante sur } I.}$$

$$\boxed{(\forall x \in I)\ \ f'(x) > 0 \iff \quad f \ \textit{est strictement croissante sur } I.}$$

$$\boxed{(\forall x \in I)\ \ f'(x) \leq 0 \iff \quad f \ \textit{est décroissante sur } I.}$$

$$\boxed{(\forall x \in I)\ \ f'(x) > 0 \iff \quad f \ \textit{est strictement croissante sur } I.}$$

$$\boxed{f \ \textit{est Lipschitzienne sur } I \iff \quad f' \ \textit{est bornée sur } I.}$$

REMARQUE En plus des caractérisations ci-dessus, les applications du théorème des accroissements finis (TAF) sont nombreuses.

Citons en particulier le calcul de certaines limites et la démonstration de certaines inégalités (Voir TD.)

Il peut aussi s'avérer utile pour l'étude de la convergence des suites récurrentes (V. la partie sur la résolution des équations).

En outre, le théorème des accroissements finis (TAF) constitue le point de départ du module (ANALYSE 2) à travers le théorème fondamental du calcul intégral (TFCI) et du module (ANALYSE 3) par le biais de la formule de Taylor-Lagrange.

Chapitre 4

LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFICILES

4.1 Introduction

On se propose de résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0.$$

Nous supposerons que les théorèmes des valeurs intermédiaires, de la bijection et de Rolle, assurent l'existence et l'unicité d'une solution dans un certain intervalle I.

Sachant, qu'en général, il est très difficile voir impossible de trouver l'expression exacte de la solution,

Il ne nous reste qu'à essayer de l'approcher au mieux. Normalement, ces méthodes d'approximation

font partie du programme d'analyse numérique de la deuxième et troisième année.

Nous allons juste montrer l'utilisation des suites récurrentes pour approcher la solution.

On commence par remplacer l'équation initiale par une autre équation équivalente

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(x)$$

Ensuite, on construit une suite récurrente (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 \in I \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Avec un bon choix de la fonction g, on peut espérer que la suite (u_n) converge vers un certain réel α

qui serait la solution recherchée.

4.2 Comment étudier une suite récurrente

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$., c'est à dire que I est soit un segment du type $[a, b]$, soit un intervalle non borné du type $[a, +\infty[$.

Une suite récurrente première forme (u_n) est définie par

$$u_0 \in I, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : I \to I$. ou bien $f(I) \subset I$. Cette condition de stabilité de I par f, est nécessaire pour que la suite (u_n) soit bien définie et que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \in I.$$

Nous supposerons aussi que f est continue sur I.

4.2.1 Limites possibles ou probables

Si la suite (u_n) converge vers un réel L, alors $L \in I$ et puisque f est supposée être continue sur I, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = L = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(L).$$

L est donc nécessairement un point fixe de f, qui satisfait la condition $f(L) = L$.

Il se peut que f admette plusieurs point fixes. La limite éventuelle de la suite (u_n) dépend alors de la position du premier terme u_0 par rapport à ces points fixes.

4.2.2 Position de la courbe de g et de la première bissectrice

Etant donné que la limite possible est un point fixe, qui correspond à l'intersection de la courbe C_g avec la droite d'équation $y = x$, il est naturel d'examiner leurs positions relatives.

ainsi,

Si B est une partie de l'intervalle I, telle que

$$u_0 \in B \text{ et } \;(\forall x \in B) \quad g(x) \leq x$$

qui traduit le fait que la courbe représentative de la fonction g soit en dessous de la droite d'équation $y = x$, alors la suite (u_n) sera décroissante.

Si C est une partie de l'intervalle I, telle que

$$u_0 \in C \text{ et } \;(\forall x \in B) \quad g(x) \geq x$$

qui traduit le fait que la courbe représentative de la fonction g soit au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors la suite (u_n) sera croissante.

4.2.3 Cas où f est croissante sur I

Si f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone. IL SUFFIT de comparer les deux premiers termes u_0 et u_1.

$$\boxed{u_0 \leq u_1 \quad\Longrightarrow\quad (u_n) \text{ est croissante}}$$

Pour cela, Comme dans un jeu d'enfants, on montre facilement par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \leq u_{n+1}$$

$$\boxed{u_0 \geq u_1 \quad\Longrightarrow\quad (u_n) \text{ est décroissante}}$$

Pour cela, Comme dans un autre jeu d'enfants, on montre facilement par récurrence que :

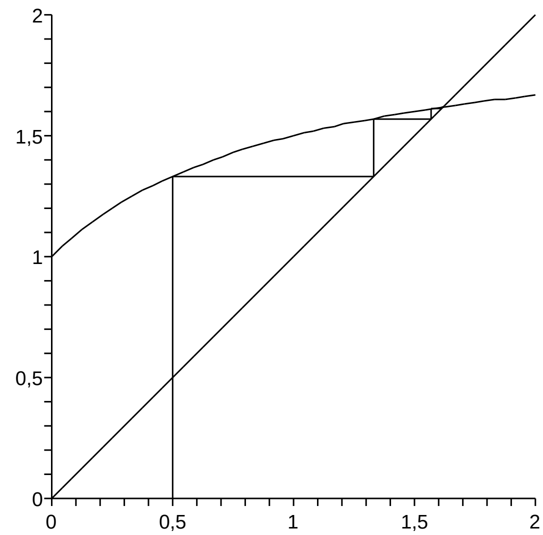

FIGURE 4.1 – Cas où f est croissante et (u_n) croissante convergente.

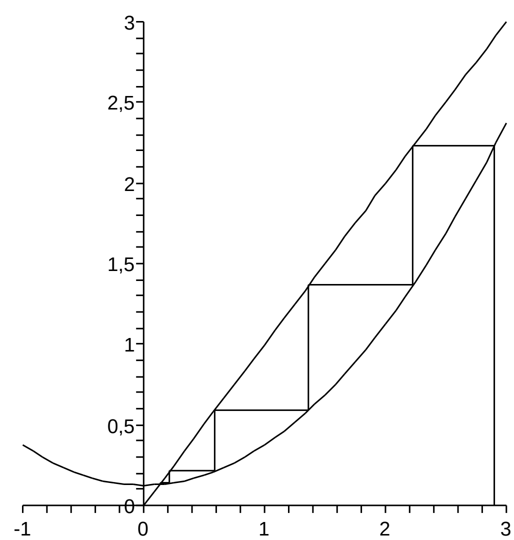

FIGURE 4.2 – Cas où f est croissante et (u_n) décroissante convergente.

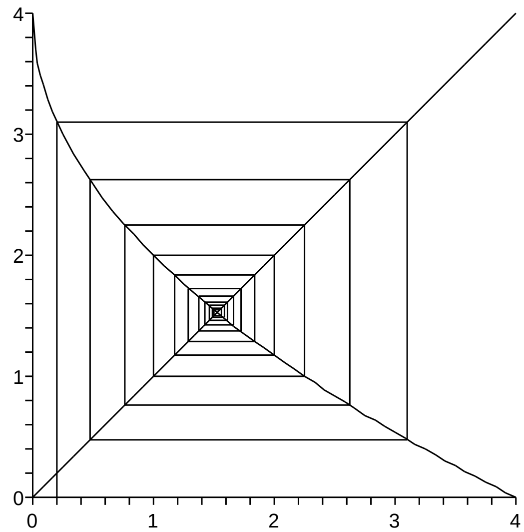

FIGURE 4.3 – Cas où f est décroissante et (u_n) CONVERGENTE.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \geq u_{n+1}.$$

Pour savoir si (u_n) est majorée ou minorée, il suffit de comparer u_0 avec le point fixe L.

$$\boxed{u_0 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \geq L}$$

$$\boxed{u_0 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \leq L}$$

Il n'y a pas plus simple que de raisonner, encore une fois, par récurrence.

4.2.4 Cas où f est décroissante sur I

Si f est décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et varient en sens inverse.

IL SUFFIT de comparer les deux premiers termes u_0 et u_2.

$$\boxed{u_0 \leq u_2 \implies (u_{2n}) \text{ est croissante et } (u_{2n+1}) \text{ décroissante.}}$$

$$\boxed{u_0 \geq u_2 \implies (u_{2n}) \text{ est décroissante et } (u_{2n+1}) \text{ croissante.}}$$

$$\boxed{u_0 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{2n} \geq L}$$

$$\boxed{u_1 \geq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{2n+1} \geq L}$$

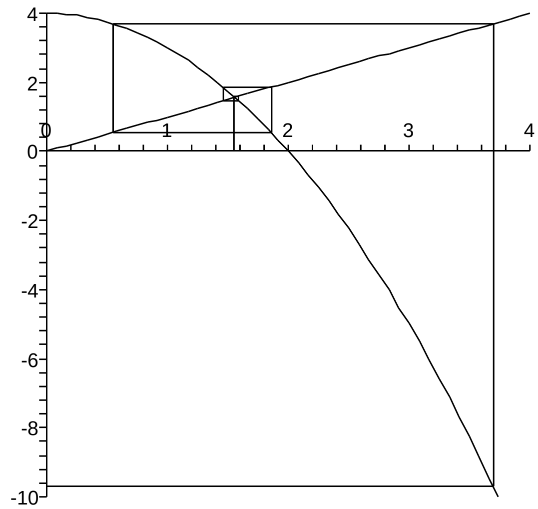

FIGURE 4.4 – Cas où f est décroissante et (u_n) DIVERGENTE.

$$\boxed{u_0 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{2n} \leq L}$$

$$\boxed{u_1 \leq L \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{2n+1} \leq L}$$

COMME dans le cas où f est croissante, Toutes les propriétés précédentes, se démontrent aisément à l'aide du raisonnement par récurrence.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \iff (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$$

4.2.5 Utilisation du théorème des accroissements finis : TAF

Soit (u_n) une suite récurrente associée à la fonction $f : I \to I$, où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On suppose que L est un point fixe de f appartenant à I.

On suppose de plus que f est dérivable sur I. On a alors, daprès le TAF,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (\exists c \in I) \;\; : \;\; u_{n+1} - L = f(u_n) - f(L) = (u_n - L)f'(c).$$

Distinguons les deux cas suivants :

1^{er} cas

$$(\forall x \in I) \; |f'(x)| \leq K < 1$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; |u_n - L| \leq K|u_{n-1} - L| \leq K^n|u_0 - L|.$$

La suite (u_n) converge vers L.
Dans ce cas, le point fixe est dit attractif (Voir Fifure 3.)
2$^{\text{ème}}$ cas

$$(\forall x \in I)\ |f'(x)| \geq K > 1$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |u_n - L| \geq K|u_{n-1} - L| \geq K^n|u_0 - L|.$$

La suite (u_n) est alors divergente.
Dans ce cas, le point fixe est dit répulsif (Voir Fifure 4.)