SMIA 2 - Equations Différentielles

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

1 Introduction : bismillah

Definition 1. On appelle équation différentielle ayant comme inconnue la fonction $x \mapsto y(x)$, toute égalité vérifiée par la variable x, l'inconnue y, et ses dérivées successives $y', y'', ...$

Exemple 2. $y'' = y' + x^2 y$ *est une équation différentielle d'ordre deux, car elle fait intervenir la dérivée seconde.*

$y' = x^2 y + \ln(x)$ *est une équation différentielle d'ordre un.*

En mécanique, le mouvement d'un corps de masse M est gouverné par l'équation différentielle

$$M\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}.$$

En électrocinétique, l'intensité de courant $i(t) = \frac{dq}{dt}$ qui traverse un circuit (R, L, C) soumis à une tension $u(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t).$$

Ces exemples montrent que la modélisation et la compréhension des phénomènes mécaniques, éléctriques, éléctromagnétiques, quantiques, optiques, météorologiques .... passent par la résolution de l'équation différentielle qui régit le phénomène en question.

Ceci justifie l'intérêt des équations différentielles en analyse mathématique.

La plupart des équations différentielles sont impossibles à résoudre analytiquement (Les équations de Navier-Stockes entre autres). Pour rester dans le cadre du programme, nous allons nous intéresser uniquement à des types d'équations relativement simples, pour lesquels on dispose de techniques permettant de trouver explicitement la, ou les solutions exactes.

Pour les équations différentielles compliquées, il nous reste les méthodes numériques (Euler, Runge et Kutta, différences finies ...) qui ne donnent malheureusement que des solutions approchées.

L'étude détaillée de la théorie des équations différentielles (l'existence de la solution, l'unicité, l'intervalle de validité de la solution, ainsi que la notion de solution maximale ...), sera abordée normalement au cours du semestre 6.

2 Forme Générale d'une équation différentielle

Toute équation différentielle peut être mise sous la forme

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

où $x \in I$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de $I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Résoudre ce type d'équation différentielle, revient à trouver un intervalle $J \subset I$ et une fonction y dérivable sur J telle que

$$(\forall x \in J) \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

2.1 Problème de Cauchy

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et f une application de $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si l'on se donne le couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall x \in I) \quad y'(x) = f(x, y)$$

et

$$y(x_0) = y_0$$

2.2 Existence et unicité de la solution

L'existence de la solution au problème de Cauchy $y' = f(x, y)$ avec la condition $y(x_0) = y_0$ est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz suivant

Si $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors il existe un intervalle $J \subset I$ tel que
$x_0 \in J$ et une seule solution y vérifiant

$$(\forall x \in J) \;\; y'(x) = f(x, y) \text{ avec } y(x_0) = y_0.$$

Pour les types d'équations qui nous intéressent dans le cadre du programme, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz seront toujours satisfaites. Les solutions existent alors et nous allons juste nous familiariser avec quelques techniques de résolution qui permettent de trouver l'expression exacte de la solution. Lorsque la résolution de l'équation n'est pas possible, on utilise des méthodes de l'analyse numérique du type Euler, Runge et Kutta qui ne donnent malheureusement que des solutions approchées.

Dans notre cas, pour résoudre une équation différentielle, la première chose à faire, consiste à reconnaître son type :

linéaire, à variables séparées, de Bernouilli, ... puis d'appliquer la méthode de résolution correspondante.

3 Equations Simples

3.1 Equations à variables séparées

Comme son nom l'indique, c'est une équation de la forme

$$\boxed{y'g(y) = f(x)}$$

que l'on écrit aussi sous la forme

$$g(y)dy = f(x)dx$$

ce qui donne après intégration

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

c'est à dire

$$G(y) = F(x) + C$$

et finalement

$$\boxed{y = G^{-1}(F(x) + C) \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

Exemple 3. *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$\boxed{\frac{y'}{\sqrt{y}} = x^2}$$

Cette équation s'écrit aussi

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$$

qui s'intègre en

$$2\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C \text{ où } C \in \mathbb{R},$$

ce qui donne

$$\boxed{y = \frac{1}{4}(\frac{x^3}{3} + C)^2}$$

3.2 Equations Homogène

C'est une équation du type

$$\boxed{y' = f(\frac{y}{x})} \quad (EH)$$

Pour résoudre ce type d'équation, on effectue le changement d'inconnue suivant

$$y(x) = t(x).x$$

la dérivation par rapport à x, donne

$$y'(x) = t'(x).x + t(x)$$

L'équation (EH) devient alors

$$xt' + t = f(t)$$

c'est à dire

$$\boxed{\frac{t'}{f(t) - t} = x}$$

qui est une équation à variable séparée.

Exemple 4. *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$\boxed{y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}}$$

Posons $y = t(x)x$.
L'équation se transforme en

$$t'x + t = t^2 + t$$

c'est à dire

$$\frac{t'}{t^2} = \frac{dx}{x}$$

ce qui donne après intégration

$$\frac{-1}{t} = \ln(\frac{x}{\lambda}) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

et finalement, la solution est donnée par

$$\boxed{y = tx = \frac{x}{\ln(\frac{\lambda}{x})}}$$

4 Equation linéaire du premier ordre

C'est une équation de la forme dite complète

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x) \quad (EC)}$$

ou incomplète

$$\boxed{y' = a(x)y \quad (EI)}$$

La résolution de l'équation complète (EC) se fait en TROIS étapes :

* <u>Résolution de l'équation incomplète (EI) associée qui donne la solution y_I</u>

* <u>Recherche de solution particulière y_p de l'équation complète (EC)</u>

* <u>La solution générale est alors la somme $y_C = y_I + y_p$</u>

4.1 Equation linéaire du premier ordre INCOMPLETE

C'est une équation qui s'écrit sous la forme

$$\boxed{y' = a(x).y} \quad (EI)$$

où a est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Sachant que la fonction nulle sur I est solution, on cherchera une solution qui ne s'annule pas sur l'intervalle I.

L'équation peut alors s'écrire sous la forme

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

qui donne après intégration

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = \int a(x)dx$$

où λ est une constante réelle ayant le même signe que y.

la solution de l'équation (EI) est alors donnée par

$$\boxed{y_I = \lambda e^{\int a(x)dx}}$$

Exemple 5. *Résoudre l'équation linéaire du premier ordre incomplète suivante*

$$y' = \sin(x)y$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \sin(x)$$

qui donne après intégration

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = -\cos(x)$$

et finalement

$$\boxed{y_I = \lambda e^{-\cos(x)} \ \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Remarque 6. La méthode de la variation de la constante, utilisée dans la suite, consiste à remplacer la constante λ, par $\lambda(x)$.

4.2 Equation linéaire du premier ordre COMPLETE

C'est une équation qui s'écrit sous la forme

$$\boxed{y' = a(x).y + b(x)} \qquad (EC)$$

où a et b sont deux applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Supposons que l'on connaîsse une solution particulière y_p, de l'équation (EC).

Si y_C est une solution de l'équation (EC), alors, on aura

$$y'_C = a(x)y_C + b(x) \text{ et}$$

$$y'_p = a(x)y_p + b(x),$$

La différence de ces deux équations donne

$$(y_C - y_p)' = a(x)(y_C - y_p),$$

Ce qui veut dire que $y_C - y_p$ est solution de l'équation incomplète (EI).

par suite, d'après la paragraphe précédent,

$$y_C - y_p = \lambda e^{\int a(x)dx}$$

et finalement

$$\boxed{y_C = \lambda e^{\int a(x)dx} + y_p}$$

Ceci montre que pour connaître la solution de l'équation différentielle complète (EC), il suffit de faire la somme de la solution de l'équation incomplète (EI) et d'une solution particulière y_p de l'équation complète (EC).

$$\boxed{y_C = y_I + y_p}.$$

Il se peut que dans certains cas, la solution particulière soit évidente.

Sinon, pour trouver une solution particulière y_p de l'équation complète (EC), on utilise la méthode de la variation de la constante qui marche pratiquement à tous les coups.

Ce qui veut dire que la solution particulière y_p sera de la forme

$$y_I = \lambda e^{\int a(x)dx} \to y_p = \lambda(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Si l'on remplace y_p dans l'équation (EC), on obtient

$$\lambda'(x)e^{\int a(x)dx} + a(x)y_p = a(x)y_p + b(x)$$

et

$$\lambda'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

d'où

$$\lambda(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

Ce qui détermine la solution particulière

$$y_p = \left(\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)e^{\int a(x)dx}$$

et par suite,la solution générale de l'équation complète, définie par

$$\boxed{y_C = y_I + y_p = \lambda e^{\int a(x)dx} + \left(\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)e^{\int a(x)dx}}$$

Où λ est un réel.

Exemple 7. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\boxed{xy' = -y + \frac{1}{x(x+1)}} \quad (EC)$$

Il s'agit d'une équation linéaire du 1^{er} *ordre complète.*
On commence par résoudre l'équation incomplète suivante :

$$xy' = -y$$

qui s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x} \quad (EI)$$

ce qui donne après intégration,

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = -\ln(|x|) = \ln(\frac{1}{|x|})$$

c'est à dire

$$\boxed{y_I = \frac{\lambda}{x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p.

Utilisons la méthode de la variation de la constante, et posons

$$y_p = \frac{\lambda(x)}{x}.$$

y_p *est alors solution de l'équation complète si et seulement si*

$$x(\frac{\lambda'(x)}{x} - \lambda(x)\frac{1}{x^2}) + \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

ou bien

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et par suite

$$\lambda(x) = \ln(|\frac{x}{x+1}|)$$

d'où la solution particulière

$$y_p = \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{\ln(|\frac{x}{x+1}|)}{x}$$

La solution générale de l'équation complète est alors définie par

$$\boxed{y_C = \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln(|\frac{x}{x+1}|)}{x} \ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Exemple 8. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\boxed{y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (EC)$$

Il s'agit d'une équation linéaire du 1^{er} *ordre complète.*
<u>*On commence par résoudre l'équation incomplète suivante :*</u>

$$y' = \frac{y}{x}$$

qui s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad (EI)$$

ce qui donne après intégration,

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = \ln(|x|)$$

c'est à dire

$$\boxed{y_I = \lambda x \ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p.
Utilisons la méthode de la variation de la constante, et posons

$$y_p = \lambda(x)x.$$

y_p est alors solution de l'équation complète si et seulement si

$$\lambda'(x)x + \lambda(x) = \lambda(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ou bien

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et par suite

$$\lambda(x) = \arcsin(x)$$

d'où la solution particulière

$$y_p = \lambda(x)x = x\arcsin(x)$$

La solution générale de l'équation complète est alors définie par

$$\boxed{y_C = \lambda x + x\arcsin(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Remarque 9. Dans certain cas, il n'est pas nécessaire de faire appel à la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière de l'équation complète.

Exemple 10. *Une solution particulière de l'équation $xy' = y + x^2$ est, sans la variation de la constante, $y_p = x^2$.*

Une solution particulière de l'équation $xy' = 2y - 3x$ est, sans la variation de la constante, $y_p = 3x$.

5 Equation non linéaire se ramenant au cas linéaire

Une équation différentielle non linéaire est une équation qui contient par exemple des termes du type y^n avec $n \geq 2$.

Exemples: $y' = y^2$ ou $y' = y^2 + xy$.

5.1 Equations de Bernouilli

Soit $n \geq 2$ et I un intervalle sur lequel les fonctions $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ sont continues.

L'équation de Bernouilli est de la forme

$$\boxed{y' = a(x).y + b(x).y^n}$$

Pour la recherche de solution autre que la fonction identiquement nulle $y = 0$, on divise par y^n pour obtenir l'équation

$$\frac{y'}{y^n} = a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x)$$

puis on fait un changement d'inconnue en posant

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

ce qui donne

$$\boxed{z' = (1-n)\frac{y'}{y^n} = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x)}$$

qui est une équation linéaire du premier ordre en z que l'on sait résoudre.

Exemple 11. *Résoudre l'équation suivante :*

$$\boxed{2y' = y + xy^3}$$

Il s'agit d'une équation du type Bernouilli.
Après division par y^3, l'équation devient

$$\frac{2y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x.$$

Posons alors

$$z = \frac{1}{y^2} \text{ avec } z' = \frac{-2y'}{y^3}$$

L'équation devient

$$-z' = z + x$$

qui est une équation linéaire du premier ordre complète.
On commence par résoudre l'équation incomplète suivante :
Elle s'écrit

$$-z' = z \text{ ou bien } \frac{z'}{z} = -1$$

ce qui donne après intégration

$$\ln(\frac{z}{\lambda}) = -x$$

et par suite

$$\boxed{z_I = \lambda e^{-x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Cherchons maintenant une solution particulière z_p.
Utilisons la méthode de la variation de la constante et posons $z_p = \lambda(x)e^{-x}$.
z_p est alors solution de l'équation complète si et seulement si

$$-(\lambda'(x) - \lambda(x))e^{-x} = x + \lambda(x)e^{-x}$$

c'est à dire

$$\lambda'(x) = -xe^{x}$$

et après intégration par parties,

$$\lambda(x) = -\int xe^x = e^x(1-x) \text{ et } z_p = (1-x)$$

La solution générale de l'équation en z

$$z = z_I + z_p = \lambda e^{-x} + (1-x)$$

et finalement, la solution de l'équation initiale est définie par

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda e^{-x} + (1-x)}}}$$

5.2 Equation de Ricatti

Soit I un intervalle sur lequel les trois fonctions $x \mapsto a(x)$, $x \mapsto b(x)$ et $x \mapsto c(x)$ sont continues.

L'équation de Ricatti est de la forme

$$\boxed{y' = a(x).y^2 + b(x).y + c(x)}$$

Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut connaître une solution particulière y_p.

Dans ce cas, on a

$$y'_p = a(x).y_p^2 + b(x).y_p + c(x)$$

La différence de ces deux équations donne

$$(y - y_p)' = a(x).(y - y_p)(y + y_p) + b(x).(y - y_p)$$

On pose maintenant

$$u = y - y_p.$$

On obtient alors

$$\boxed{u' = a(x).u(u + 2y_p) + b(x).u = a(x)u^2 + (2y_p + b(x))u}$$

Qui est une équation de Bernouilli en u avec $n = 2$.

Pour la résolution, on pose

$$z = \frac{1}{u^{n-1}} = \frac{1}{u} = \frac{1}{y - y_p}$$

c'est à dire, que l'on remplace y par $\frac{1}{z} + y_p$.

Exemple 12. *Résoudre l'équation différentielle suivante sachant que $y = \frac{1}{x}$ est solution.*

$$\boxed{y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \quad (ER)}$$

Il s'agit d'une équation du type Ricatti.
Posons alors

$$z = \frac{1}{y - \frac{1}{x}} \ \text{ou bien}\ y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$$

L'équation devient alors

$$\frac{-z'}{z^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

c'est à dire

$$z' = \frac{-z}{x} - 1 \ \ (EC)$$

Qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre complète.
L'équation incomplète qui lui est associée s'écrit

$$z' = \frac{-z}{x} \ \ (EI)$$

qui s'intègre en

$$\ln(\frac{z}{\lambda}) = -\ln(|x|)$$

ce qui donne

$$z_I = \frac{\lambda}{x}$$

Cherchons une solution particulière z_p de l'équation (EC) à l'aide de La méthode de la variation de la constante .
Ce qui conduit à

$$\frac{\lambda'(x)}{x} = -1$$

et par suite

$$\lambda(x) = \frac{-x^2}{2}.$$

ainsi

$$z_p = \frac{-x}{2}.$$

La solution générale de l'équation complète (EC) est alors définie par

$$z_C = z_I + z_p = \frac{\lambda}{x} - \frac{x}{2}$$

Finalement, la solution de l'équation de Ricatti (ER)

$$\boxed{y = \frac{1}{\frac{\lambda}{x} - \frac{x}{2}} + \frac{1}{x}}$$

6 Equations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

C'est une équation de la forme

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{(EC)}}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et f une fonction continue sur un certain intervalle I.

Remarquons d'abord que si y et y_p sont deux solutions de l'équation (EC), alors la diférence $y - y_p$ est solution de l'équation incomplète suivante, parfois appelée équation sans second membre :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{(EI)}}$$

Ce qui montre la solution de l'équation complète (EC) peut être obtenue en faisant la somme de la solution de l'équation incomplète (EI), et d'une solution particulière y_p de (EC).

6.1 Equations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants sans second membre

C'est une équation de la forme

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad (EH)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence de solutions définies sur $\mathbb{R}$. De plus, pour un couple $(X_0, V_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, il existe une et une seule solution Y de l'équa tion (EH) satisfaisant les conditions (initiales) : $Y(0) = X_0$ et $Y'(0) = V_0$.

On admettra que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2, isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Pour trouver les solutions de cette équation, il suffit alors de trouver deux solutions indépendantes qui formeraient une base de cet espace.

Pour cela, commençons par chercher, s'il en existe, des solutions de la forme $y = y(x) = e^{\alpha x}$. Ce qui donne $y' = \alpha y$ et $y'' = \alpha^2 y$.

On a donc une solution si et seulement si

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \text{ (équation caractéristique)}$$

Trois cas sont alors possibles

1. $\underline{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

   L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles $\alpha_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\alpha_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. les deux fonctions $x \mapsto e^{\alpha_1 x}$ et $x \mapsto e^{\alpha_2 x}$ sont indépendantes, donc

   la solution de l'équation (EH) sera donnée par

   $$\boxed{y_I = \lambda e^{\alpha_1 x} + \mu e^{\alpha_2 x}}$$

Exemple 13. $y'' - 5y' + 6y = 0$

L'équation caractéristique s'écrit : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1 > 0 \implies \alpha_1 = 2$ *et* $\alpha_2 = 3$

finalement

$$\boxed{y_I = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}}$$

2. $\underline{b^2 - 4ac = 0}$ L'équation caractéristique possède une racine double $\alpha = \frac{-b}{2a}$. La fonction $f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}$ est solution de l'équation (EH) ci-dessus. Vérifions que la fonction $f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x} = xf_1(x)$ est aussi solution de (EH). on a

$$f_2'(x) = f_1(x) + xf_1'(x)$$

$$f_2''(x) = 2f_1'(x) + xf_1''(x)$$

donc

$$\begin{aligned} af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x) &= 2af_1'(x) + axf_1''(x) + bf_1(x) + bxf_1'(x) + cxf_1(x) \\ &= x\Big(af_1''(x) + bf_1'(x) + cf_1(x)\Big) + (2a\alpha + b)f_1(x) = 0 \end{aligned}$$

car f_1 est solution de l'équation (EH) et que $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

Les deux solutions $f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}$ et $f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}$ sont indépendantes

$(f_1 \neq kf_2)$, donc la solution générale de l'équation (EH) sera donnée par

$$\boxed{y_I = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}}.$$

Exemple 14. $y'' - 6y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique s'écrit : $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 0 \implies$ *une racine double* $\alpha = 3$

finalement

$$\boxed{y_I = (\lambda + \mu x)e^{3x}}$$

3. $\underline{b^2 - 4ac < 0}$

Dans ce cas, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = r + is \text{ et son conjugué } z_2 = r - is = \overline{z_1}.$$

Les deux fonctions complexes $x \mapsto e^{(r+is)x}$ et $x \mapsto e^{(r-is)x}$ sont alors solutions.

Pour obtenir des solutions réelles, remarquons que L'équation (EH), étant linéaire,

La somme $e^{rx}(e^{isx} + e^{-isx}) = 2e^{rx}\cos(sx)$ est aussi solution de (EH).

De même, la différence $e^{rx}(e^{isx} - e^{-isx}) = 2ie^{rx}\sin(sx)$ est aussi solution de (EH).

On en déduit que les deux fonctions $x \mapsto e^{rx}\cos(sx)$ et $x \mapsto e^{rx}\sin(sx)$ sont des solutions indépendantes. Par conséquent

la solution générale de l'équation (EH) sera donnée par

$$y_I = e^{rx}\Big(\lambda\cos(sx) + \mu\sin(sx)\Big).$$

Exemple 15. $y'' - 2y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique s'écrit : $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = -4 \implies$ *deux racines complexes conjuguées* $z_1 = 1 + i$ *et* $z_2 = 1 - i$

finalement

$$\boxed{y_I = e^x(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)}$$

Vérifions que $y_0 = e^x\cos(x)$ *est solution de l'équation* $y'' - 2y' + 2y = 0$.

$$y_0' = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$
$$y_0'' = e^x(\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x)) = -2e^x\sin(x)$$

par suite,

$$y_0'' - 2y_0' + 2y_0 = -2e^x\sin(x) - 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) + 2e^x\cos(x) = 0$$

CQFD.

6.2 Solution particulière d'une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants

6.2.1 $f(x)$ est un polynôme $P_n(x)$ de degré n.

On cherchera alors une solution particulière y_p ayant une forme polynômiale.

Premier cas : $c \neq 0$

$\deg(ay_p'' + by_p' + cy_p) = \deg y_p = n$

On posera alors

$$y_p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Deuxième cas : $c = 0, b \neq 0$

$\deg(ay_p'' + by_p') = \deg y_p' = n$

donc $\deg(y_p) = n + 1$.

On posera alors

$$y_p = x \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Exemple 16. $y'' + y' = x + 10$ *On cherchera y_p sous la forme*

$$y_p = x(Ax + B)$$

<u>Troisième cas</u> : $b = c = 0, a \neq 0$

$\deg(ay_p'') = \deg y_p'' = n$

donc $\deg(y_p) = n + 2$.

On posera alors

$$y_p = x^2 \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Exemple 17. $y'' = x + 10$
On cherchera y_p sous la forme

$$y_p = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$$

donc $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx$ *et* $y_p'' = 6Ax + 2B = x + 10$
ce qui donne $A = \frac{1}{6}$ *et* $B = 5$
la solution particulière sera alors $y_p = \frac{x^3}{6} + 5x^2$

6.2.2 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

Considérons l'équation différentielle linéaire du second oredre à coefficients constants suivante

$$ay'' + by' + c = P_n(x)e^{\alpha x}$$

où α est un réel et $P_n(x)$ un polynôme de degré n.

La meilleure chose à faire, consiste à poser $y = ze^{\alpha x}$ pour éliminer le terme $e^{\alpha x}$ et se ramener à une équation avec un membre de droite de la forme $P_n(x)$ traité dans le paragraphe précédent.

6.2.3 $f(x) = P_n(x)\cos(\omega x)$ ou $P_n(x)\sin(\omega x)$

Il y a deux cas possibles :
<u>Premier cas</u> : $i\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique

On cherchera alors une solution particulière de la forme

$$y_p = Q_n(x)\cos(\omega x) + R_n(x)\sin(\omega x)$$

où $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ sont des polynômes de même degré n que $P_n(x)$.

Deuxième cas : $i\omega$ est une racine de l'équation caractéristique

On cherchera alors une solution particulière de la forme

$$y_p = x\Big(Q_n(x)\cos(\omega x) + R_n(x)\sin(\omega x)\Big)$$

où $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ sont des polynômes de même degré n que $P_n(x)$.

6.2.4 $f(x)$ est quelconque

Dans ce cas, on utilise la méthode de la variations de deux constantes, c'est à dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation sans second membre $ay''+by'+cy=0$, alors on cherchera une solution particulière de l'équation complète $ay''+by'+cy=f(x)$ sous la forme

$$y_p = \lambda(x)y_1 + \mu(x)y_2.$$

ce qui donne

$$y_p' = \lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 + \lambda(x)y_1' + \mu(x)y_2'.$$

Pour faciliter la recherche d'une solution particulière, On impose la condition supplémentaire suivante

$$\boxed{\lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0} \quad (eq1)$$

Si bien que

$$y_p' = \lambda(x)y_1' + \mu(x)y_2'$$

et

$$y_p'' = \lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' + \lambda(x)y_1'' + \mu(x)y_2''$$

Par suite, y_p est solution de $ay''+by'+cy=f(x)$ si

$$\boxed{a\Big(\lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2'\Big) = f(x)} \quad (eq2)$$

Les deux équations $(eq1)$ et $(eq2)$ forment un système dont la résolution, détermine $\lambda(x)$ et $\mu(x)$

et par conséquent, la solution particulière y_p.

Exemple 18. *Résolvons l'équation différentielle suivante*

$$y'' + y = tg(x)$$

Résolution de l'équation sans second membre $y'' + y = 0$
L'équation caractéristique $x^2 + 1 = 0$ *a pour solutions* $x = \pm i$.
la solution est alors

$$\boxed{y_I = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}}$$

Recherche de la solution particulière de l'équation complète $y'' + y = tg(x)$
Utilisons la méthode de la variation de deux constantes et posons

$$y_p = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x).$$

Il faut alors résoudre le système

$$\begin{aligned} (eq1) \quad &: \quad \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) = 0 \\ (eq2) \quad &: \quad \lambda'(x)(-\sin(x)) + \mu'(x)\cos(x) = tg(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \cos(x)eq1 - \sin(x)eq2 = \lambda'(x) &= -\frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)} \\ &= \frac{(-\sin(x))^2}{1-(\sin(x))^2}\cos(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda(x) = \int \frac{(-\sin(x))^2}{1-(\sin(x))^2}\cos(x)dx &= \int \frac{-t^2 dt}{1-t^2} \\ &= \int 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big)dt \\ &= t - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+t}{1-t}) \\ &= \sin(x) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\Big) \end{aligned}$$

et

$$\sin(x)eq1 + \cos(x)eq2 = \mu'(x) = \sin(x)$$

D'où

$$\mu(x) = -\cos(x)$$

Finalement, la solution particulière est donnée par

$$\boxed{y_p = \left(\sin(x) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})\right)\cos(x) - \cos(x)\sin(x)}$$

La solution générale est donc

$$y_G = y_I + y_p.$$

7 Equation linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants

C'est une équation du type

$$\boxed{a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)} \quad (EV)$$

En général, il est très difficile de résoudre ce genre d'équation.

Mais dans certains cas, comme par exemple lorsque les fonctions $x \mapsto a(x)$, $x \mapsto b(x)$ et $x \mapsto c(x)$ sont des polynômes, la résolution est possible à condition de connaître une solution particulière y_1 (comme pour l'équation de Ricatti).

Dans ce cas, on effectue le changement d'inconnue suivant

$$y = z.y_1$$

qui permet de transformer l'équation (EV) en une équation linéaire, que l'on sait, à priori, résoudre .

Vous verrez l'année prochaine, que l'on peut chercher la solution particulière y_1 sous la forme de la somme d'une série entière, c'est à dire que $y_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Si l'on trouve une autre solution y_2 indépendante de y_1, alors la solution de l'équation (EV) sera une combinaison linéaire de la forme

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2$$

Exemple 19.

$$(x+1)y'' + xy' - y = 0 \quad (EV)$$

Remarquons que $y = e^{-x}$ est une solution particulière de (EV)
Posons alors $y = ze^{-x}$ avec $y' = (z' - z)e^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$.
L'équation (EV) devient alors après simplification par le terme e^{-x},

$$(x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z = 0$$

ou bien

$$(x+1)z'' = (x+2)z' \text{ ou } \frac{z''}{z'} = \frac{x+2}{x+1}$$

qui s'intègre en

$$\ln(\frac{z'}{\lambda}) = x + \ln(|x+1|)$$

c'est à dire

$$z' = \lambda(x+1)e^x$$

ce qui donne

$$z = \lambda x e^x \text{ puis } y = \lambda x.$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$\boxed{y = \lambda x + \mu e^{-x}}$$

EXERCICES CORRIGES

<u>Exercice 1</u> : *Equations simples*

Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$\boxed{E_1 \quad : \quad y' = y^2 \qquad\qquad E_2 \quad : \quad y'' = \sin(x)}$$

Pour la première équation, la fonction nulle $y = 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$. Si l'on cherche une solution y qui ne s'annule pas, l'équation devient

$$\frac{y'}{y^2} = 1$$

est après intégration,

$$\frac{1}{y} = -x + C_1$$

d'où

$$\boxed{y = \frac{1}{C_1 - x}}$$

Pour la deuxième équation, une première intégration donne

$$y' = -\cos(x) + C_1$$

puis une deuxième intégration conduit à

$$\boxed{y = -\sin(x) + C_1.x + C_2 \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

<u>Exercice 2</u> : *Equation à variables séparées*

Intégrer l'équations différentielle suivante:

$$\boxed{(E) \quad : \quad \frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Solution

L'équation (E) s'écrit

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1 + x^2}$$

qui s'intègre en

$$2\sqrt{y} = \arctan(x) + C$$

ce qui donne

$$\boxed{y = \frac{1}{4}(\arctan(x) + C)^2.}$$

C est une constante réelle.

Exercice 3: *Equation sans second membre*

Donner la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{(E) \quad : \quad y' + \frac{y}{x(1+x)} = 0}$$

Solution

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

L'équation (E) admet donc des solutions sur chacun de ces intervalles. La fonction nulle étant solution, cherchons une solution qui ne s'annule pas et qui garde un signe constant.

L'équation (E) s'écrit alors

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

qui s'intègre en

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = \ln(|\frac{x+1}{x}|)$$

Où λ est une constante ayant le même signe que y, ce qui donne

$$\boxed{y = \lambda\frac{x+1}{x}}$$

Exercice 4: *Equation avec second membre*

On considère l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{\quad : \quad y' - \frac{2}{x}y = 1 \quad (E)}$$

-1) Résoudre l'équation (E).

-2) Préciser la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

Solution

-1) L'équation incomplète s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

et s'intègre en

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = 2\ln(|x|)$$

ce qu donne

$$y_I = \lambda x^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de la forme

$$y_p = \lambda(x)x^2$$

qui conduit à

$$\lambda'(x)x^2 = 1$$

ce qui donne

$$\lambda(x) = -\frac{1}{x}$$

et

$$y_p = -x$$

Finalement, la solution générale de l'équation (E) est donnée par

$$y_E = y_I + y_p = \lambda x^2 - x$$

-2) La solution qui vérifie $y(1) = 0$ est déterminée par $y_E(1) = \lambda - 1 = 0$, d'où

$$y = x^2 - x$$

<u>Exercice</u> <u>5</u> : *Problème de Cauchy*

Soit E l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{(1 - x^2)y' - 2xy = 1} \quad (1)$$

-1) Résoudre l'équation E dans l'intervalle $]-1, 1[$.

-2) Préciser la solution qui satisfait la condition $y(0) = 1$.

Solution

-1) Résolvons d'abord l'équation incomplète $(1-x^2)y' - 2xy = 0$.

Elle s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1-x^2}$$

qui s'intègre en

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = -\ln(1-x^2)$$

ce qui donne la solution de l'équation incomplète :

$$y_i = \frac{\lambda}{1-x^2}.$$

A l'aide de la variation de la constante, Cherchons une solution particulière de la forme $y_p = \frac{\lambda(x)}{1-x^2}$. Ce qui conduit à

$$(1-x^2)(\frac{\lambda'(x)}{1-x^2} + \frac{2x\lambda(x)}{(1-x^2)^2}) - 2x\frac{\lambda(x)}{1-x^2} = 1$$

ou bien

$$\lambda'(x) = 1$$

d'où

$$\lambda(x) = x$$

La solution particulière de l'équation (1) est alors définie par

$$y_p = \frac{x}{1-x^2}$$

Finalement, on a la solution générale de l'équation (1)

$$\boxed{y_g = y_i + y_p = \frac{\lambda}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

-2) La condition $y(0) = 1$ donne $\lambda = 1$.

<u>Exercice</u> 6: *Equation de Bernouilli*

Donner la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{(EB) \quad : \quad y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3y^2}$$

Solution

Il est clair que la fonction nulle $y = 0$ est solution sur $\mathbb{R}$. Cherchons une solution qui ne s'annule pas. Après division par y^2, l'équation (E) s'écrit

$$\frac{y'}{y^2} = 2\frac{1}{xy} + 2x^3.$$

En posant $z = \frac{1}{y}$, elle devient

$$-z' = 2\frac{z}{x} + 2x^3$$

qui est une équation linéaire du premier ordre en z que l'on sait résoudre.
L'équation incomplète s'écrit

$$-z' = 2\frac{z}{x}$$

qui donne après intégration

$$\ln(\frac{z}{\lambda}) = -\ln(x^2)$$

c'est à dire

$$z_I = \frac{\lambda}{x^2}$$

La méthode de la variation de la constante donne alors

$$-\lambda'(x)\frac{1}{x^2} = 2x^3$$

ou bien

$$\lambda'(x) = -2x^5$$

et par suite

$$\lambda(x) = \frac{-x^6}{3}.$$

Ce qui donne la solution particulière $z_p = \frac{x^4}{3}$
et par suite, la solution générale de l'équation en z :

$$z = z_I + z_p = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x^4}{3}$$

La solution de l'équation (EB) sera alors

$$\boxed{y_B = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{\lambda}{x^2} + \frac{x^4}{3}}}$$

<u>Exercice 7</u>: *Equation de Riccati*

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{(ER) \quad : \quad y' = (y-x)^2 + 1}$$

Remarquer que $y = x$ est solution de E.

Posons
$$z = \frac{1}{y-x} \text{ ou } y = \frac{1}{z} + x.$$
donc
$$y' = \frac{-z'}{z^2} + 1.$$
L'équation (ER) devient
$$\frac{-z'}{z^2} + 1 = \frac{1}{z^2} + 1$$
c'est à dire
$$z' = -1 \text{ et par suite } z = -x + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$
Finalement, la solution de l'équation (ER) sera définie par
$$\boxed{y = \frac{1}{C-x} + x}$$

<u>Exercice</u> <u>8</u> : *Equation homogène*

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{(E) \quad : \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1}$$

Faisons le changement d'inconnue suivant : $t(x) = \frac{y}{x}$.
On a donc
$$y = tx \implies y' = t'x + t$$
L'équation (E) devient
$$t'x + t = t^2 + t - 1$$
c'est à dire
$$t'x = t^2 - 1$$
ou bien
$$\frac{dt}{t^2-1} = \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{t-1} - \frac{dt}{t+1}\right)$$
qui est une équation à variable séparées qui s'intègre en
$$\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) = \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

d'où

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{x^2}{\lambda^2} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

et

$$t = \frac{1}{1-\frac{x^2}{\lambda^2}} - 1$$

d'où la solution générale

$$\boxed{y = tx = x(\frac{1}{1-\frac{x^2}{\lambda^2}} - 1)}$$

<u>Exercice</u> <u>9</u>: *Equation linéaire du $2^{ème}$ ordre à coefficients constants*

Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes:

$$E_1 \quad : \quad y'' - 2y' + y = 0$$
$$E_2 \quad : \quad y'' + 2y' + 5y = 0$$
$$E_3 \quad : \quad y'' + 4y = 4x^2 + 10e^{-x} + \cos(2x)$$

Résolution de (E_1)
L'équation caractéristique associée à (E_1) s'écrit

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Le discriminant Δ est nul, donc elle admat une racine double $x = 1$
La solution générale est alors donnée par

$$\boxed{y_1 = (\lambda + \mu x)e^x}$$

Résolution de (E_2)
L'équation caractéristique associée à (E_2) s'écrit

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

$\Delta = -16 \implies$ il y a deux racines complexes

$$x_1 = -1 - 2i \text{ et } x_2 = -1 + 2i$$

La solution générale est alors donnée par

$$\boxed{y_2 = \lambda e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))}$$

Résolution de (E_3)

L'équation caractéristique associée à (E_3) s'écrit

$$x^2 + 4 = 0$$

Elle admet deux racines complexes conjuguées $2i$ et $-2i$.
la solution générale de l'équation sans second membre est alors définie par

$$y_I = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Pour trouver une solution particulière, on utilisera le principe de superposition, c'est à dire que :

puisque le second membre de l'équation (E_3) est une somme de trois termes, on cherchera une solution correspondant à chaque terme. La linéarité de l'équation (E_3) fera que la somme de ces trois solutions sera une solution particulière de l'équation (E_3).

Solution particulière correspondant au terme $4x^2$.

$$yp_1 = dx^2 + ex + f$$
$$yp_1' = 2dx + e$$
$$yp_1'' = 2d$$
$$yp_1'' + 4y_1 = 4dx^2 + 4ex + 4f + 2d = 4x^2$$
$$yp_1 \text{ est solution } \iff d = 1,\ e = 0 \text{ et } f = \frac{-1}{2}$$

ce qui donne

$$\boxed{yp_1 = x^2 - \frac{1}{2}}$$

Solution particulière correspondant au terme $10e^{-x}$.

Posons $yp_2 = ke^{-x}$. car $-i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. donc

$$yp_2' = -ke^{-x} \text{ et } yp_2'' = ke^{-x}$$

$$yp_2'' + 4y_p2 = 5ke^{-x}$$

$$yp_2 \text{ est solution } \iff k = 2$$

ce qui donne

$$\boxed{yp_2 = 2e^{-x}}$$

REMARQUE

On peut trouver une solution particulière de l'équation $y'' + 4y = 10e^{-x}$ (2) en posant d'abord

$y = ze^{-x}$. ce qui donne $y' = (z' - z)e^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$.

L'équation devient alors après simplification par le termee^{-x},

$$z'' - 2z' + 5z = 10 \ \ (3)$$

A partir de là, il est presque évident que $z = 2$ est solution particulière de l'équation (3).

La solution particulière de l'équation (2), est alors donnée par

$y_p = 2e^{-x}$ déjà trouvée plus haut.

Solution particulière correspondant au terme $\cos(2x)$.

Posons $yp_3 = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$ car $2i$ est solution de l'équation caractéristique. donc

$$yp_3' = (A\cos(2x) + B\sin(2x)) + 2x(-A\sin(2x) + B\cos(2x))$$

$$yp_3'' = 4(-A\sin(2x) + B\cos(x)) - 4yp_3$$

yp_3 est donc solution particulière si et seulement si

$$yp_3'' + 4yp_3 = 4(-A\sin(2x) + B\cos(x)) = \cos(2x)$$

l'identification donne

$$A = 0 \text{ et } B = \frac{1}{4}$$

et finalement

$$yp_3 = \frac{x}{4}\sin(2x).$$

VERIFICATION

$$yp_3' = \frac{1}{4}(\sin(2x) + 2x\cos(2x))$$

$$yp_3'' = \frac{1}{4}(4\cos(2x) - 4x\sin(2x) = \cos(2x) - x\sin(2x)$$

et donc,comme prévu

$$yp_3'' + 4yp_3 = \cos(2x).$$

Finalement, la solution générale de l'équation initiale ($E3$) est donnée par

$$\boxed{y_g = y_I + yp_1 + yp_2 + yp_3}$$

$$\boxed{A\cos(2x) + B\sin(2x) + x^2 - \frac{1}{2} + 2e^{-x} + \frac{x}{4}\sin(2x)}$$

Exercice 10: *Changement de variable*

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{t^2y'' + ty' + y = 0} \quad (1)$$

On effectuera le changement $x = \ln(t)$.

Solution

Au lieu de chercher la solution $y(t)$ fonction de la variable t, nous allons chercher la solution $Y(x) = Y(ln(t)) = y(t)$ fonction de la variable $x = \ln(t)$.

La dérivation de la composée d'une fonction donne

$$y'(t) = Y'(x)x'(t) = Y'(x)\frac{1}{t}$$

et

$$y''(t) = Y''(x)x'(t)\frac{1}{t} - Y'(x)\frac{1}{t^2}$$

si bien que l'équation (1) devienne

$$t^2(Y''(x)x'(t)\frac{1}{t} - Y'(x)\frac{1}{t^2}) + t(Y'(x)\frac{1}{t}) + Y(x) = 0$$

c'est à dire

$$Y'' - Y' + Y' + Y = 0 = Y'' + Y$$

La solution est alors

$$Y = Y(x) = A\cos(X) + B\sin(X)$$

Finalement, on obtient la solution de l'équation (1),

$$\boxed{y(t) = Y(\ln(t)) = A\cos(\ln(t)) + B\sin(\ln(t))}$$

...La fin, c'est maintenant ...Pour comprendre, l'effort est obligatoire