SMIA 2

INTEGRALE GENERALISEE

Abdallah Hammam
Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Meknès - Morocco.

a.hammam@fs.umi.ac.ma

Toute remarque venant de votre part est la bienvenue.

Si vous trouvez une erreur, merci de la signaler.
vous aurez un POINT de plus à l'examen.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels, Définitions et Critères primaires

Introduction

$\boxed{\text{Pour être récompensé, Il faut fournir un effort.}}$

Dans le chapitre : " Intégrale de Riemann ", nous avons défini l'intégrale d'une fonction f bornée, sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Nous avons interprété cette intégrale comme étant la SURFACE délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'intégrale d'une fonction pas nécessairement bornée sur un intervalle pas obligatoirement compact (ouvert ($]a, b[$), semi-fermé ($[a, b[$), semi-ouvert ($]a, b]$), non borné ($[a, +\infty[$), ...)

Dans tous les cas, nous aurons besoin de la définition suivante :

Definition 1. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et f une application de I vers $\mathbb{R}$.

On dit que f est Localement Intégrable sur l'intervalle I si et seulement si elle est intégrable (au sens de Riemann) sur tout compact (segment) inclus dans I. En d'autres termes,

$$\boxed{f \text{ est localement intégrable sur } I \iff (\forall (A, B) \in I^2) \quad f \text{ est intégrable sur } [A, B]}$$

En particulier, Toute Fonction Continue ou monotone ou ayant un ensemble de discontinuités fini, ou même dénombrable sur un intervalle est Localement intégrable Sur cet intervalle.

En général, les fonctions que l'on va considérer sont continues et par conséquent, localement intégrables.

Si une fonction f n'est pas Localement Intégrable sur l'intervalle I, On ne peut pas définir son intégrale sur cet intervalle.

Commençons d'abord par rappeler le critère de Cauchy pour la limite d'une fonction. Ce critère nous sera utile et cette année, et les années à venir étant donné qu'il est intimement lié à toutes les notions définies par une limite (convergence d'une série numérique, convergence simple d'une suite de fonctions, convergence uniforme d'une suite de fonctions, convergence d'une série de fonctions,...)

1.1 Critère de Cauchy pour la limite d'une fonction

Soit F une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie ou infinie de I (ce qu'on appelle un point d'accumulation) et $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1.1 Rappel sur la définition de la limite d'une fonction

On rappelle que

$$\lim_{x \to x_0, \neq} F(x) = L \iff (\forall V \in \mathcal{V}(L)) \ (\exists U \in \mathcal{V}(x_0)) \ : \ F(U \cap I - \{x_0\}) \subset V$$

$$\iff (\forall V \in \mathcal{V}(L)) \ (\exists U \in \mathcal{V}(x_0)) \ : \ (\forall x \in U \cap I - \{x_0\}) \ F(x) \in V.$$

$$\iff \text{ pour } x \text{ proche de } x_0 \ , \quad F(x) \text{ est très proche de } L.$$

$\mathcal{V}(L)$ et $\mathcal{V}(x_0)$ désignent réspectivement les ensembles des voisinages de L et de x_0.

Par exemple,

Si L est fini alors $V =]L - \epsilon, L + \epsilon[$
Si $L = +\infty$ alors $V = [A, +\infty[$ ou $]A, +\infty[$ avec $A > 0$.
Si $L = -\infty$ alors $V =]-\infty, B[$ avec $B < 0$.
Si x_0 est fini, alors $U =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Si $x_0 = +\infty$ alors $U = [C, +\infty[$ avec $C > 0$.

remarque 2. *On notera souvent* $\lim_{x \to x_0} F(x)$ *au lieu de* $\lim_{x \to x_0, \neq} F(x)$

1.1.2 Critère de Cauchy

C'est un critère qui offre une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette une limite réelle finie en un point d'accumulation de son domaine de définition.

Le critère de Cauchy permet de montrer l'Existence d'une limite sans forcément connaître sa valeur.

Ce Critère traduit tout simplement que si $F(x)$ tend vers une limite réelle finie, quand x tend vers x_0, alors

LORSQUE x et y sont proches de x_0, la différence $|F(x) - F(y)|$ sera proche de 0, et donc aussi petite que l'on veut, c'est à dire que si x et y sont très proches de x_0, $|F(x) - F(y)|$ sera $< \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ arbitrairement choisi.

Commençons par revenir sur le fameux critère de Cauchy pour les suites, qui confirme la complétude de $\mathbb{R}$. Si (u_n) est une suite de réels, alors

$$(u_n) \text{ est convergente} \iff (u_n) \text{ est une suite de Cauchy}$$

ce qui se traduit par

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R} \iff (\forall\epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ :\ (\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2)\ \Big(q > p \geq N \implies |u_p - u_q| < \epsilon\Big)$$

ou, en termes de voisinages

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R} \iff (\forall\epsilon > 0)\ (\exists U \in \mathcal{V}(+\infty))\ :\ (\forall(p,q) \in (U \cap \mathbb{N})^2)\ |u_p - u_q| < \epsilon$$

ou en langage pro,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R} \iff \text{pour } p \text{ et } q \text{ suffisamment grands, } |u_p - u_q| \text{ très proche de } 0$$

La caractérisation séquentielle de la limite (V. Analyse 1), permet de généraliser ce critère pour les suites, et d'obtenir le critère de Cauchy pour les fonctions :

Lemme 3.

$* * * * * * * *$ *Critère de Cauchy pour la limite d'une fonction* $* * * * * * * *$

$$\lim_{x\to x_0} F(x) \in \mathbb{R} \iff (\forall\epsilon > 0)\ (\exists U \in \mathcal{V}(x_0))\ :(\forall(X,Y) \in (U \cap I - \{x_0\})^2)\ |F(X) - F(Y)| < \epsilon$$

$$\iff \textit{pour } X \textit{ et } Y \textit{ proches de } x_0\ |F(X) - F(Y)| \textit{ est très proche de } 0$$

L'implication gauche-droite résulte de l'inégalité triangulaire. L'implication droite-gauche se démontre en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite ainsi que la complétude de $\mathbb{R}$.

***************** Cas Particuliers ******************

$* * * * *\ x_0 = 0\ * * * * *$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F(x) \in \mathbb{R} \iff \text{pour } x \text{ et } y \text{ suffisamment petits } |F(x) - F(y)| \text{ est très proche de } 0}$$

$* * * * *\ x_0 = +\infty\ * * * * *$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R} \iff \text{pour } x \text{ et } y \text{ assez grands } |F(x) - F(y)| \text{ est très proche de } 0}$$

Ce critère relativement théorique peut servir à démontrer le critère de comparaison et le critère de la convergence absolue. Il arrive aussi que l'on se serve du critère de Cauchy pour montrer qu'une intégrale est divergente.

1.1.3 Rappel sur la composition des limites

Elle nous sera très utile pour démontrer la formule du changement de variable dans le cas des intégrales généralisées.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie ou infinie de I, et F une application réelle définie sur I. De même, Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 un point ou une borne finie ou infinie de J, et ϕ une application définie de J sur I.

$$J \xrightarrow{\phi} I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

Théorème 4.

$$\lim_{t\to t_0,\neq} \phi(t) = x_0 \ \textit{et} \ \lim_{x\to x_0,\neq} F(x) = L \implies \lim_{t\to t_0,\neq} F(\phi(t)) = L$$

Sans oublier la condition Primordiale

$$\boxed{\phi(J - \{t_0\}) \subset I - \{x_0\}}$$

Exemple 5.

$$J = [0,1], t_0 = 0, \quad I = [0,1], \quad x_0 = 0$$
$$\phi(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \text{ et } \phi(0) = 1$$

$$F(x) = 2 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } F(0) = 3.$$

On a

$$\lim_{t\to 0,\neq} \phi(t) = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0,\neq} F(x) = 2$$

Or

$$F(\phi(t)) = 3 \text{ si } t \neq 0 \text{ et } F(\phi(0)) = 2$$

Donc

$$\lim_{t\to 0,\neq} F(\phi(t)) = 3 \neq 2!!!$$

Ceci s'explique par le fait que la condition encadrée plus haut, n'est pas satisfaite.

En effet,

$$J - \{t_0\} =]0,1], \quad I - \{x_0\} =]0,1] \text{ mais } \phi(J - \{t_0\}) = \phi(]0,1]) = \{0\}$$
$$\text{n'est PAS Inclus dans } I - \{x_0\} =]0,1]$$

remarque 6. *Lorsque l'on aura besoin d'appliquer ce théorème sur la composition des limites, pour montrer la formule du changement de variable pour une intégrale généralisée, la condition encadrée est fort heureusement vérifiée étant donné que* $\phi(J - \{t_0\}) = I - \{x_0\}$.

1.2 Intégrale sur un intervalle semi-fermé $[a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soient a et b deux réels FINIS, et f une application localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$.

On peut alors définir sa fonction intégrale F sur $[a, b[$, par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$.

Definition 7. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$, impropre en b , est convergente

$$\iff \lim_{X \to b^-} F(X) \in \mathbb{R}$$

$$\iff \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, on dira que l'intégrale est divergente.

Dans le cas où l'intégrale est convergente, Si $\displaystyle\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt = L$, on posera par définition :

$$\int_a^b f(t)dt = L = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$$

remarque 8. *La définition de la convergence d'une intégrale impropre montre que pour bien maîtriser cette notion, Il faut d'abord maîtriser les notions de LIMITE et d'intégrale de Riemann et leurs propriétés . Sinon, ce n'est pas la peine.*

Etudier la nature d'une intégrale impropre, c'est dire si cette intégrale est convergente ou divergente. Pour cela, il faut relever les bornes de l'intégrale qui font qu'elle est impropre, ensuite appliquer le critère adéquat qui permet de conclure de façon sûre et certaine.

Exemple 9. $a = 0, b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.(Figure 1.1)

f est continue sur $[0, 1[$ donc elle est localement intégrable sur $[0, 1[$,

De plus $(\forall X \in [0, 1[)$ $F(X) = \displaystyle\int_0^X f(t)dt = \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^X = \frac{1}{1-X} - 1$.

Or $\displaystyle\lim_{X \to 1^-} F(X) = \lim_{X \to 1^-} \frac{1}{1-X} - 1 = +\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ impropre en 1 est divergente.

Exemple 10. $a = 1, b = 2$ et $f : x \mapsto \ln(2 - x)$.(Figure 1.2)

f est continue sur $[1, 2[$ donc elle est localement intégrable sur $[1, 2[$,

De plus $(\forall X \in [1, 2[)$ $F(X) = \int_1^X f(t)dt = \Big[(t-2)\ln(2-t) - t\Big]_1^X = (X - 2)\ln(2 - X) - X + 1$.

Or $\displaystyle\lim_{X \to 2^-} F(X) = \lim_{X \to 2^-} ((X - 2)\ln(2 - X) - X + 1) = -1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt$ impropre en 2 est convergente et

$$\int_1^2 \ln(2 - t)dt = -1$$

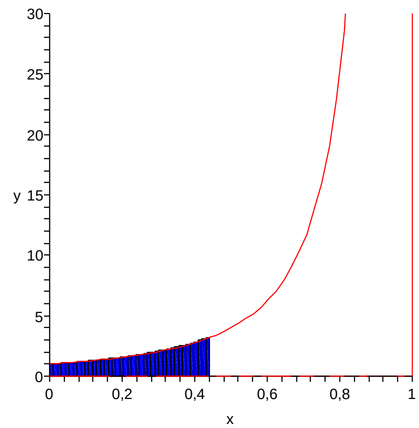

FIGURE 1.1 – La surface tend vers une limite INfinie : l'intégrale diverge

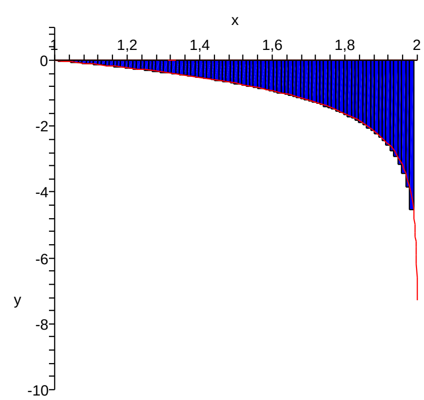

FIGURE 1.2 – La surface tend vers une limite finie : : l'intégrale converge

remarque 11. *La convergence d'une intégrale impropre est une notion LOCALE.*
Soit $c \in [a, b[$ *quelconque.*
D'après la relation de Chasles, on a

$$(\forall x \in [a, b[) \quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$$

donc

$$\lim_{x \to b^+} \int_a^x f \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to b^+} \int_c^x f \in \mathbb{R}$$

C'est à dire que

$$\text{les deux intégrales } \int_a^b f \text{ et } \int_c^b f \text{ sont de même nature}$$

1.2.1 Critère de la fonction bornée

Théorème 12. *Soient* a *et* b *deux réels FINIS, et* f *une application localement intégrable sur l'intervalle* $[a, b[$.

$$\boxed{f \text{ bornée sur } [a, b[\implies \int_a^b f \text{ est convergente}}$$

démonstration 13. f *bornée sur* $[a, b[\implies (\exists M > 0) : (\forall x \in [a, b[) \ |f(x)| \leq M$
Le cas $M = 0$ *n'est pas intéressant (*f *est la fonction nulle.)*
Posons $f(b) = M$ *et montrons que* f *est alors intégrable (au sens de Riemann) sur le compact* $[a, b]$.
Pour cela, faisons appel au critère d'intégrabilité de Cauchy !
Soit alors $\epsilon > 0$ *suffisamment petit donné (pour être sur que* $a < b - \frac{\epsilon}{4M} < b$*).*
Par hypothèse,
f *localement intégrable sur* $[a, b[\implies$
f *est intégrable sur* $[a, b - \frac{\epsilon}{4M}] \implies$

$$\exists \text{ (une subdivision) } \sigma_1 \in S_{[a, b - \frac{\epsilon}{4M}]} \ : \ U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \{b\}$. *il est clair que* $\sigma \in S_{[a,b]}$ *et que*

$$U(f, \sigma) - L(f, \sigma) = U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) + \Big(\sup_{[b - \frac{\epsilon}{4M}, b]} f - \inf_{[b - \frac{\epsilon}{4M}, b]} f\Big)\frac{\epsilon}{4M}$$

$$\implies \quad U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) + 2M\frac{\epsilon}{4M} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} (= \epsilon).$$

Il s'en suit que f *est intégrable sur* $[a, b]$ *et que sa fonction intégrale* $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ *est alors continue sur* $[a, b]$, *EN particulier en* b.
Ceci se traduit par

$$\lim_{X \to b^-} \int_a^X f = F(b) = \int_a^b f$$

En d'autres termes, l'intégrale $\int_a^b f$ *est Convergente.*

Exemple 14. $a = -1, \quad b = 0, \quad$ et $\quad f : x \mapsto \cos(\frac{1}{x^2})$

f est continue sur $[-1, 0[$, donc elle est localement intégrable sur $[-1, 0[$.

D'autre part,

$$(\forall x \in [-1, 0[) \quad |f(x)| \leq 1$$

f est bornée sur $[-1, 0[\implies \displaystyle\int_{-1}^{0} \cos(\frac{1}{x^2})dx$ est Convergente.

1.2.2 Critère du prolongement à gauche

Corollaire 15.

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} f(x) \text{ existe } (\in \mathbb{R}) \implies \int_a^b f \text{ est convergente}}$$

démonstration 16. *Supposons que* $\lim_{x \to b^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

En utilisant la définition de la limite avec $\epsilon = 7$, *par exemple,*

$\lim_{x \to b^-} f(x) = L \in \mathbb{R} \implies (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall x \in [b - \eta, b[) \ |f(x) - L| < 7$

$\implies (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall x \in [b - \eta, b[) \ 7 - L < f(x) < 7 + L$

$\implies f$ *est bornée sur* $[b - \eta, b[$

d'autre part, f *étant, par hypothèse, localement intégrable sur* $[a, b[$, *sera intégrable donc bornée sur le compact* $[a, b - \eta]$.

Elle est donc bornée sur la réunion $[a, b - \eta] \cup [b - \eta, b[= [a, b[$.

On applique alors le thérorème précédent.

Exemple 17. $a = 0, \ b = 1,$ et $f : x \mapsto (x - 1)\ln(1 - x)$

f est continue sur $[0, 1[$, donc elle est localement intégrable sur $[0, 1[$.

d'autre part, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - 1)\ln(1 - x) = 0$

D'après le critère du prolongement, l'intégrale $\int_0^1 (x - 1)\ln(1 - x)dx$, impropre en 1 est convergente.

1.3 Intégrale sur un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soit (a, b) un couple de réels et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a, b]$.

On peut alors définir sur $]a, b]$ une sorte de fonction intégrale F par $F(x) = \int_x^b f$.

Definition 18. On dit que l'intégrale impropre en a est convergente si et seulement si

$$\lim_{X \to a^+} \int_X^b f(t)dt \in \mathbb{R}$$

ou bien

$$\lim_{X\to a^+} F(X) \in \mathbb{R}$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, on dira que l'intégrale est divergente.

Dans le cas où l'intégrale est convergente, Si $\lim_{X\to a^+} \int_X^b f(t)dt = L$, on posera par définition :

$$\int_a^b f(t)dt = L = \lim_{X\to a^+} \int_X^b f(t)dt$$

Exemple 19. $a = 0, b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

f est continue sur $]0, 1]$ donc elle est localement intégrable sur $]0, 1]$,

De plus $(\forall X \in]0, 1])$ $F(X) = \int_X^1 f(t)dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_X^1 = -1 + \frac{1}{X}$.

Or $\lim_{X\to 0^+} F(X) = \lim_{X\to 0^+} (-1 + \frac{1}{X}) = +\infty$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ impropre en 0 est divergente.

Exemple 20. $a = 1, b = 2$ et $f : x \mapsto \ln(x - 1)$.

f est continue sur $]1, 2]$ donc elle est localement intégrable sur $]1, 2]$,

De plus $(\forall X \in]1, 2])$ $F(X) = \int_X^2 f(t)dt = \Big[(t-1)\ln(t-1) - t\Big]_X^2 = -2 + X - (X - 1)\ln(X - 1)$.

Or $\lim_{X\to 1^+} F(X) = \lim_{X\to 1^+} \Big(-2 + X - (X - 1)\ln(X - 1)\Big) = -1$, donc l'intégrale $\int_1^2 f(t)dt$ impropre en 1 est convergente et

$$\int_1^2 \ln(x - 1)dx = -1$$

Exemple 21. $a = 2, b = 3$ et $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

f est continue sur $]2, 3]$ donc elle est localement intégrable sur $]2, 3]$,

De plus $(\forall X \in]2, 3])$ $F(X) = \int_X^3 f(t)dt = \Big[2\sqrt{t-2}\Big]_X^3 = 2(1 - \sqrt{X-2})$.

Or $\lim_{X\to 2^+} F(X) = \lim_{X\to 2^+} \Big(2(1 - \sqrt{X-2})\Big) = 2$, donc l'intégrale $\int_2^3 f(t)dt$ impropre en 2 est convergente et

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2$$

1.3.1 Critère de la fonction bornée

Théorème 22.

$$\boxed{f \text{ bornée sur }]a, b] \implies \int_a^b f \text{ est convergente}}$$

Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \cos(\frac{1}{x})dx$, impropre en 0, est convergente car la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$, est localement intégrable et bornée sur $]0,1]$.

1.3.2 Critère du prolongement à droite

Corollaire 23.

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) \ \textit{existe}\ (\in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \ \textit{est convergente}}$$

Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 x\ln(x)dx$, impropre en 0 est convergente, car la fonction $x \mapsto x\ln(x)$, est localement intégrable sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc prolongeable en 0^+.

1.4 Intégrale sur un intervalle non borné $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$

Soit a un réel et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On peut alors définir sa fonction intégrale F sur $[a,+\infty[$, par $F(x) = \int_a^x f$.

Definition 24. On dit que l'intégrale impropre à cause de la borne $+\infty$ est convergente

$$\Longleftrightarrow \lim_{X\to+\infty} F(X) \ \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt \ \in \mathbb{R}$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, on dira que l'intégrale est divergente.

Dans le cas où l'intégrale est convergente, Si $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt = L$, on posera par définition :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = L.$$

Exemple 25. $a = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

f est continue sur $[1,+\infty[$ donc elle est localement intégrable sur $[1,+\infty[$,

De plus $(\forall X \in [1,+\infty[)$ $F(X) = \int_1^X f(t)dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^X = \ln(X)$.

Or $\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Exemple 26. $a = 1$, et $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

f est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle est localement intégrable sur $[1, +\infty[$,

De plus $(\forall X \in [1, +\infty[)$ $F(X) = \displaystyle\int_1^X f(t)dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^X = 1 - \frac{1}{X}$.

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} (1 - \frac{1}{X}) = 1$, donc l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Exemple 27. $a = 0$, et $f : x \mapsto 6xe^{-x^2}$.

f est continue sur $[0, +\infty[$ donc elle est localement intégrable sur $[0, +\infty[$,

De plus $(\forall X \in [0, +\infty[)$ $F(X) = \displaystyle\int_1^X f(t)dt = \left[-3e^{-t^2}\right]_0^X = 3(1 - e^{-X^2})$.

Or

$$\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} (3(1 - e^{-X^2})) = 3\ ,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} 6xe^{-x^2} dx = 3.$$

Exemple 28. $a = 0$ et $f : x \mapsto \cos(x)$.

f est continue, donc localement intégrable, sur $[0, +\infty[$.

D'autre part, pour $X \geq 0$,

$$F(X) = \int_0^X \cos(t)dt = \left[\sin(t)\right]_0^X = \sin(X).$$

Or, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sin(X)$ n'existe pas

donc

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x)dx$ est Divergente.

1.4.1 Critère de la limite en plus l'infini

Si $f(x)$ tend vers une limite réelle NON NULLE, ou vers $\pm\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Théorème 29.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}^* \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \ \ \textit{est Divergente}}$$

démonstration 30. *Dans un premier temps, on suppose que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$

D'après la définition de la limite, avec $\epsilon = \frac{L}{2}$,

$$(\exists A > a) \quad : \quad (\forall t \geq A) \quad L - \epsilon < f(t) < L + \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall t \geq A) \ \ \frac{L}{2} < f(t)$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall x \geq A) \quad \int_A^x f(t)dt > \frac{L}{2}(x - A)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)dt = +\infty$$

$$\Longrightarrow \int_A^{+\infty} f(t)dt \ \ et \ \int_a^{+\infty} f(t)dt \ \ sont\ divergentes$$

Si $L = +\infty$, *d'après la définition de la limite,*

$$(\exists A > a)\ (\forall t \geq A) \ \ f(t) > 100$$

$$\Longrightarrow \quad (\forall x \geq A) \quad \int_A^x f(t)dt > 100(x - A)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)dt = +\infty$$

$$\Longrightarrow \int_A^{+\infty} f(t)dt \ \ et \ \int_a^{+\infty} f(t)dt \ \ sont\ divergentes$$

Exemple 31. $a = 1$, et $f : x \mapsto \text{arctg}(x)$.

f est continue sur $[0, +\infty[$, donc elle est localement intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} arctg(x)$ est Divergente.

D'ailleurs, pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x arctg(t)dt = [t.arctg(t)]_0^x - \int_0^x \frac{tdt}{1+t^2}$$

$$= x.arctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

$$= x.arctg(x) - \frac{1}{2}\ln\Big(x^2(1 + \frac{1}{x^2})\Big) = x\Big(arctg(x) - \frac{\ln(x)}{x}\Big) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{x^2}).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

1.5 Intégrale sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$

Soit b un réel et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]-\infty, b]$ On peut alors définir sur $]-\infty, b]$, une sorte de fonction intégrale F par $F(X) = \int_X^b f$.

Definition 32. On dit que l'intégrale impropre à cause de la borne $-\infty$ est convergente

$$\iff \lim_{X \to -\infty} F(X) \in \mathbb{R}$$

$$\iff \lim_{X \to -\infty} \int_X^b f(t)dt \in \mathbb{R}$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, on dira que l'intégrale est divergente.

Dans le cas où l'intégrale est convergente, Si $\lim_{X \to -\infty} \int_X^b f(t)dt = L$, on posera par définition :

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = L$$

Exemple 33. $b = \frac{\pi}{2}$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

f est continue sur $]-\infty, \frac{\pi}{2}]$ donc elle est localement intégrable sur $]-\infty, \frac{\pi}{2}]$

De plus $(\forall X \in]-\infty, \frac{\pi}{2}])$ $F(X) = \int_X^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \Big[-\cos(t)\Big]_X^{\frac{\pi}{2}} = \cos(X)$.

Or $\lim_{X \to -\infty} F(X) = \lim_{X \to -\infty} \cos(X)$ qui n'existe pas, donc

l'intégrale $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ est divergente.

Exemple 34. $b = 0$ et $f : x \mapsto e^x$.

f est continue sur $]-\infty, 0]$ donc elle est localement intégrable sur $]-\infty, 0]$,

De plus $(\forall X \in]-\infty, 0])$ $F(X) = \int_X^0 f(t)dt = \Big[e^t\Big]_X^0 = 1 - e^X$.

Or $\lim_{X \to -\infty} F(X) = \lim_{X \to -\infty} (1 - e^X) = 1$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$$

1.5.1 Critère de la limite en moins l'infini

Théorème 35.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}^* \implies \int_{-\infty}^b f(x)dx \;\; \textit{est Divergente}}$$

La démonstration est identique à celle du critère de la limite en plus l'infini.

1.6 Intégrale sur un intervalle ouvert $]a,b[$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Definition 36. On dira que l'intégrale impropre à la fois en a et en b est convergente si et seulement si

$$(\exists c \in]a,b[) \quad : \quad \int_a^c f \text{ ET } \int_c^b f \text{ soient toutes les DEUX convergentes}$$

remarque 37. *S'il existe* $c \in]a,b[$ *tel que l'une des deux intégrales* $\int_a^c f$ *ou* $\int_c^b f$ *est divergente, alors*

l'intégrale $\int_a^b f$ *sera dite divergente.*

Si $\lim\limits_{X \to a^+} \int_X^c f = L_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{X \to b^-} \int_c^X f = L_2 \in \mathbb{R}$, *alors, l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge et l'on posera par définition que*

$$\int_a^b f = L_1 + L_2.$$

Exemple 38. $a = -\infty,\ b = +\infty; c = 0$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

d'une part,

$\lim\limits_{X \to -\infty} \int_X^0 f = \lim\limits_{X \to -\infty} (-arctg(X)) = \dfrac{\pi}{2}$

D'autre part

$\lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X f = \lim\limits_{X \to +\infty} arctg(X) = \dfrac{\pi}{2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ est donc convergente, et de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Exemple 39. $a = 0,\ b = +\infty$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

$\int_0^1 f$ est divergente, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est aussi divergente.

En Résumé

1. L'intégrale, sur un intervalle BORNE, d'une fonction localement intégrable et BORNEE est CONVERGENTE.
2. L'intégrale, sur un intervalle NON BORNE, d'une fonction localement intégrable qui TEND vers une limite réelle non nulle $(\neq 0)$ ou infinie, quand x tend vers l'infni, est DIVERGENTE.

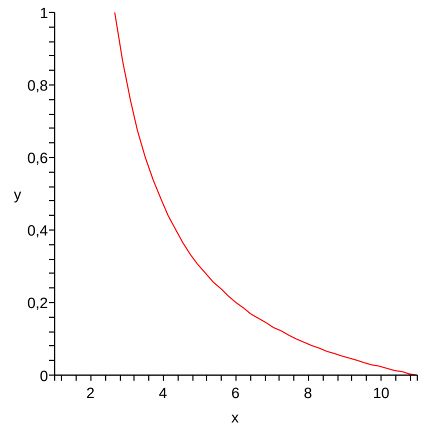

FIGURE 1.3 – Intervalle borné et fonction NON bornée

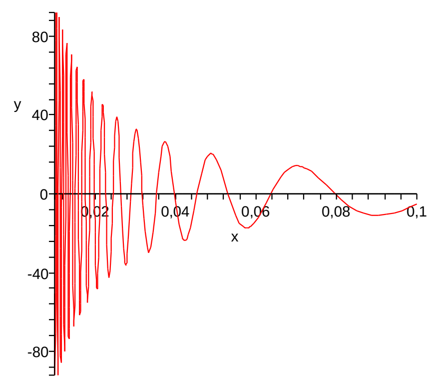

FIGURE 1.4 – Intervalle borné et fonction NON prolongeable

3. Les cas les plus délicats sont alors :(V. Figures 1.3, 1.4, 1.5, et $F1.6$)
   ** un intervalle borné et une fonction Non bornée.
   ** un intervalle Non borné et une fonction qui tend vers 0, ou qui n'admet pas de limite, à l'infini.

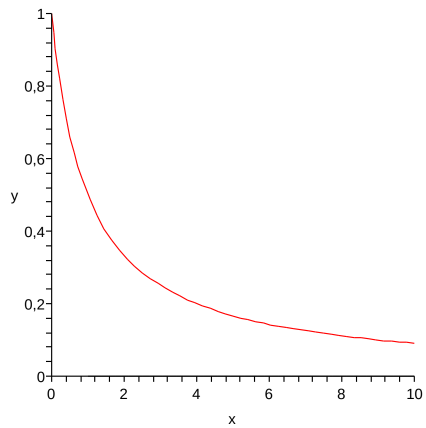

FIGURE 1.5 – Fonction qui tend vers zéro à l'infini

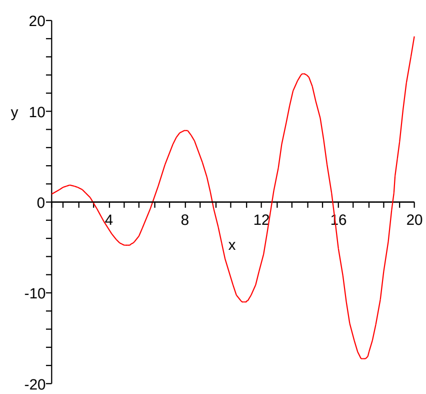

FIGURE 1.6 – Fonction qui n'a pas de limite à l'infini

Chapitre 2

Propriétés de l'intégrale généralisée, Changement de variable

Certaines propriétés des intégrales de Riemann, peuvent être transposées, par passage à la limite, aux intégrales généralisées.

Nous considérerons des fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ où a et b sont finis, mais les résultats sont identiques dans les autres cas $(]a, b],]a, b[, [a, +\infty[...)$.

2.1 Propriétés des intégrales généralisées

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$.

2.1.1 Relation de Chasles

Soit $c \in [a, b[$.

l'on sait que pout tout $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$$

donc

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \text{ existe } \iff \lim_{x \to b^-} \int_c^x f \text{ existe}$$

C'est à dire que les deux intégrales $\displaystyle\int_c^x f$ et $\displaystyle\int_a^x f$ sont exactement de même nature.

En particulier pour appliquer, par exemple, le critère de comparaison, il suffit que la fonction soit de signe constant au voisinage de b, et pas nécessairement sur tout l'intervalle $[a, b[$.

Exemple 40. :

Etude de la nature de l'intégrale impropre à cause de la borne infinie $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$, avec

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{si} \quad x < 10 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 10$$

On a

$$(\forall x \in [10, +\infty[) \;\; f(x) = \frac{1}{x}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} f(x)dx$ est divergente et par conséquent, il en est de même pour les intégrales $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{10000}^{+\infty} f(x)dx$.

2.1.2 Additivité

$$\boxed{\int_a^b f \;\text{ convergente et }\; \int_a^b g \;\text{ convergente } \Longrightarrow \int_a^b (f+g) \text{ convergente}}$$

et de plus

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Par contre

$$\boxed{\int_a^b f \;\text{ convergente et }\; \int_a^b g \;\text{ divergente } \Longrightarrow \int_a^b (f+g) \;\text{ divergente}}$$

$$\boxed{\int_a^b f \;\text{ divergente et }\; \int_a^b g \;\text{ divergente } \Longrightarrow \int_a^b (f+g) \text{ ??????(on ne peut rien dire)}}$$

démonstration 41. *D'après la propriété d'additivité de l'intégrale de Riemann, on a*

$$(\forall x \in [a, b[) \quad \int_a^x f + \int_a^x g = \int_a^x (f+g)$$

Donc, d'après la propriété d'additivité des limites,

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \in \mathbb{R} \;\textit{et}\; \lim_{x \to b^-} \int_a^x g \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \to b^-} \int_a^x (f+g) \in \mathbb{R}.$$

remarque 42. *Cette propriété d'additivité est à la base du critère du développement limité.*

2.1.3 Linéarité

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, Alors

$$\boxed{\int_a^b f \;\text{ convergente } \iff \lambda \int_a^b f \;\text{ convergente}}$$

En particulier, si $\lambda = -1$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $-\displaystyle\int_a^b f$ sont de même nature.

2.1.4 Positivité

Si f est positive sur $[a,b[$, c'est à dire que $(\forall x \in [a,b[)\ \ f(x) \geq 0$, Alors

$$\boxed{\int_a^b f \ \ \text{convergente} \ \ \Longrightarrow \ \int_a^b f \geq 0}$$

De même,
Si f est positive sur $]a,b]$, c'est à dire que $(\forall x \in]a,b])\ \ f(x) \geq 0$, Alors

$$\boxed{\int_a^b f \ \ \text{convergente} \ \ \Longrightarrow \ \int_a^b f \geq 0}$$

En particulier, si l'on calcule la valeur d'une intégrale d'une fonction POSITIVE et que l'on trouve un nombre NEGATIF, cela signifie tout simplement que l'on a fait une erreur quelque part et qu'il faut y remédier.

2.1.5 Convergence Absolue d'une intégrale généralisée

L'on sait que si une fonction f est Riemann-intégrable sur un compact $[a,b]$, alors il en est de même pour la fonction $|f|$. Ceci n'est pas vrai quand il s'agit d'intégrale impropre.

La convergence de l'intégrale de f sur $[a,b[$ n'implique pas la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$.

Par contre, on montrera, dans la section " critères pour les fonctions de signe Variable ," que la réciproque est VRAIE c'est à dire que

La convergence de l'intégrale de $|f|$ sur $[a,b[$ implique la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$.

$$\boxed{\int_a^b |f| \ \ \text{converge} \ \ \Longrightarrow \ \int_a^b f \ \ \text{converge}}$$

Si l'intégrale de la valeur absolue $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est ABSOLUMENT convergente.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et que $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge, on dira que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est SEMI-convergente, c'est à dire convergente mais pas Absolument.

On aura l'occasion de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente.

2.2 Changements de Variable

Il s'agit de transformer une intégrale généralisée DIFFICILE sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, en une nouvelle intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)dt$ PLUS FACILE à étudier, avec le lien $x = \phi(t)$.

2.2.1 Changement ϕ STRICTEMENT CROISSANT de $[\alpha,\beta[$ vers $[a,b[$

$$\begin{array}{ccc} & \phi & & f & \\ [\alpha,\beta[& \longrightarrow & [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x=\phi(t) & & \end{array}$$

Soient $(a,\alpha,b,\beta) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, f une application continue sur $[a,b[$, et ϕ une bijection de classe C^1 de $[\alpha,\beta[$ vers $[a,b[$ strictement croissante vérifiant

$$\phi(\alpha) = a \text{ et } \lim_{t\to\beta^-} \phi(t) = b^-.$$

Dans ce cas, les deux intégrales

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_\alpha^\beta f\Big(\phi(t)\Big)\phi'(t)dt \text{ sont de même nature}}$$

démonstration 43. *Posons, pour* $x \in [a,b[$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ *et pour* $t \in [\alpha,\beta[$, $G(t) = \displaystyle\int_\alpha^t f\circ\phi.\phi'$.

D'après la formule du changement de variable, dans la cas d'une intégrale de Riemann, On peut écrire

$$(\forall t \in [\alpha,\beta[) \quad \int_a^{\phi(t)} f = \int_\alpha^t f\circ\phi.\phi'$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$(\forall t \in [\alpha,\beta[) \;\; F\Big(\phi(t)\Big) = G(t)$$

ou aussi

$$(\forall x \in [a,b[) \;\; F(x) = G\Big(\phi^{-1}(x)\Big).$$

Supposons que l'intégrale impropre en b, $\displaystyle\int_a^b f$ *converge vers* L_1,

D'après la loi de composition des limites, vu précédemment,

$$\lim_{t\to\beta^-} \phi(t) = b^- \;\; et \;\; \lim_{x\to b^-} F(x) = L_1 \implies \lim_{t\to\beta^-} F(\phi)(t) = L_1$$

Car $\phi([\alpha,\beta[) = [a,b[$!!.

$$\implies \lim_{t\to\beta^-} G(t) = L_1 \implies \int_\alpha^\beta f\circ\phi.\phi' \;\; converge \;\; et$$

$$\boxed{\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f \circ \phi . \phi'}$$

Réciproquement, supposons que l'intégrale $\int_\alpha^\beta f \circ \phi . \phi'$ *soit convergente.*
D'après la règle sur la composition des limites,

$$\lim_{x \to b^-} \phi^{-1}(x) = \beta^- \textit{ et } \lim_{t \to \beta^-} G(t) = L_2 \implies \lim_{x \to b^-} G\Big((\phi)^{-1}(x)\Big)) = L_2$$

$$\implies \lim_{x \to b^-} F(x) = L_2 \implies \int_a^b f \textit{ converge et}$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f \circ \phi . \phi' = \int_a^b f}$$

Exemple 44. Soit à étudier la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x}) dx$.

Posons $x = \phi(t) = \frac{1}{t}$.

I est alors de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ qui converge, d'après le critère de l'intégration par parties.

Une démonstration similaire, basée sur la composition des limites, permet d'énoncer les résultats suivants :

2.2.2 Changement ϕ STRICTEMENT DECROISSANT de $]\alpha, \beta]$ vers $[a, b[$

$$\begin{array}{ccc} & \phi & & f & \\ ]\alpha, \beta] & \longrightarrow & [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x = \phi(t) & & \end{array}$$

*** Soient $(a, \beta, b, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, f une application continue sur $[a, b[$, et ϕ une bijection de classe C^1 de $]\alpha, \beta]$ vers $[a, b[$ strictement décroissante vérifiant

$$\phi(\beta) = a \text{ et } \lim_{t \to \alpha^+} \phi(t) = b^-.$$

Dans ce cas, les deux intégrales

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \;\text{ et }\; \int_\alpha^\beta f\Big(\phi(t)\Big)\phi'(t)dt \;\;\text{ sont de même nature}}$$

Cas Particuliers

Si f est continue sur $[a, b[$,

$$\boxed{x = \phi(t) = a + t \implies \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_0^{b-a} f\Big(\phi(t)\Big)\phi'(t)dt \text{ sont de même nature.}}$$

$$[0, b-a[\overset{\phi}{\longrightarrow} [a, b[\overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

Exemple 45.

$$\int_1^2 f(x)dx \text{ est de même nature que } \int_0^1 f(x-1)dx$$

$$\boxed{x = \phi(t) = b - t \implies \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_0^{b-a} f\Big(\phi(t)\Big)\phi'(t)dt \text{ sont de même nature.}}$$

$$]0, b-a] \overset{\phi}{\longrightarrow} [a, b[\overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

Exemple 46.

$$\int_1^2 f(x)dx \text{ est de même nature que } \int_0^1 f(2-t)dt$$

Et si $a > 0$,

$$\boxed{x = \phi(t) = \frac{1}{t} \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ et } \int_0^{\frac{1}{a}} f(\phi(t))\phi'(t)dt \text{ sont de même nature.}}$$

$$]0, \frac{1}{a}] \overset{\phi}{\longrightarrow} [a, +\infty[\overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

Exemple 47.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})dx \text{ est de même nature que } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$$

$\boxed{\text{Remarque TRES Importante}}$

Le changement de variable, nous permettra de se ramener toujours soit à une intégrale sur un intervalle borné du type $]0, b]$ ou non borné du type $[a, +\infty[$.

Dans ce qui va suivre, on ne considérera que ces deux cas.

Chapitre 3

Intégrale sur un intervalle du type $]0, b]$ avec $b > 0$

3.1 Critères généraux pour les fonctions de signe VARIABLE

3.1.1 Critère de Cauchy pour la convergence d'une intégrale sur $]0, b]$.

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi ouvert $]0, b]$ avec $b > 0$.

En appliquant le critère de Cauchy pour la limite d'une fonction, à $F : x \mapsto \int_x^b f$, on obtient

$$\int_0^b f \text{ converge } \iff \lim_{x \to 0^+} F(x) \in \mathbb{R}$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) \ : \ (\forall (x, y) \in]0, b]^2) \ (0 < x < y < \eta \implies |\int_x^y f| < \epsilon)$$

$$\iff \text{ pour } x \text{ et } y \text{ suffisamment petits , } |F(x) - F(y)| \text{ est très proche de } 0.$$

3.1.2 Critère de Convergence absolue d'une intégrale sur $]0, b]$.

L'avantage de ce critère se situe dans le fait qu'il transforme l'étude de intégrale d'une fonction de signe variable à celui d'une fonction positive. On peut ainsi appliquer les critères correspondant.

Proposition 48.

$$\boxed{\int_0^b f \ \textit{absolument convergente} \implies \int_0^b f \ \textit{convergente}}$$

démonstration 49. *ON utilise le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.*
Par définition,

$$\int_0^b f \ \textit{Absolument convergente} \implies \int_0^b |f| \ \textit{convergente}$$

$$\implies \quad (\exists \eta > 0) \; : \; (\forall (x,y) \in]0,\eta]^2) \;\; x < y \implies |\int_x^y |f|| < \epsilon$$

$$\implies \quad (\exists \eta > 0) \; : \; (\forall (x,y) \in]0,\eta]^2) \;\; x < y \implies \int_x^y |f| < \epsilon$$

car $\int_x^y |f| \geq 0.$

$$\implies \quad (\exists \eta > 0) \; : \; (\forall (x,y) \in]0,\eta]^2) \;\; x < y \implies |\int_x^y f| < \int_x^y |f| < \epsilon$$

(d'après la propriété sur la valeur absolue d'une intégrale de Riemann)

$$\implies \int_0^b f \text{ est convergente.}$$

Exemple 50. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})(1-x^2)}{\sqrt{x}} dx$
est convergente car

$$(\forall x \in]0,1]) \qquad \left|\frac{\sin(\frac{1}{x})(1-x^2)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ est évidemment convergente}$$

3.1.3 Critère de l'intégration par parties

Comme le critère du changement de variable, ce critère permet de remplacer une intégrale, difficile à étudier, par une autre plus sympathique.

Théorème 51. *Soient u et v deux applications de classe C^1 sur $]0,b]$ telles que*

$$\lim_{x \to 0^+} u(x)v(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Alors, les intégrales

$$\int_0^b u'v \text{ et } \int_0^b uv' \text{ ont la même nature.}$$

démonstration 52. *Il suffit de se rappeler que*

$$(\forall x \in]0,b]) \quad \int_x^b u'v = \Big[uv\Big]_x^b - \int_x^b uv'.$$

$$= u(b)v(b) - u(x)v(x) - \int_x^b uv'$$

puis de passer à la limite lorsque x tend vers 0^+, pour conclure.

Exemple 53. Utilisons le critère de l'intégration par parties pour étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})dx$$

pour $x \in]0,1]$, Posons $f(x) = \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}) = u(x)v'(x)$
avec
$u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$.
Donc $v(x) = -\sin(\frac{1}{x})$.
u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$.
De plus

$$\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Donc les deux intégrales

$$\int_0^1 f = \int_0^1 uv'$$

et

$$\int_0^1 u'v = -\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx$$

Sont de même nature, c'est à dire convergentes car la dernière est convergente en tant qu'une intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle borné.

3.1.4 Utilisation du développement limité

Si aucun des critères classiques, ne permet de conclure quant à la nature d'une intégrale impropre,

il nous reste le développement limité. On développe $f(x)$ au voisinage de 0^+ , sous la forme d'une somme de n fonctions

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

puis, on étudie séparément les intégrales $\int_0^b f_1, \int_0^b f_2, ... \int_0^b f_n$.

Si toutes les n intégrales sont Convergentes, on peut alors en déduire que l'intégrale $\int_0^b f$ est aussi convergente.

Par contre, Si $n-1$ intégrales sont convergentes et une seule est Divergente, alors, l'intégrale $\int_0^b f$ sera divergente.

Dans les autres cas, on ne peut rien dire.

Exemple 54. Etudions la nature de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln\Big(1 + x\cos(\frac{1}{x})\Big)}{x^2}dx$.

L'intégrale I est impropre à cause de la borne 0.

Posons, pour chaque $x \in]0,1]$, $f(x) = \frac{\ln\Big(1+x\cos(\frac{1}{x})\Big)}{x^2}$.
f est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$.

Les critères classiques ne permettent pas de conclure. Essayons le développement limité au voisinage de 0^+.

Quand $x \to 0^+$, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$, donc

$$\ln\Big(1 + x\cos(\frac{1}{x})\Big) = x\cos(\frac{1}{x}) - x^2\frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{2}\Big(1+\epsilon(x)\Big)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}) - \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{2}\Big(1+\epsilon(x)\Big) = f_1(x) + f_2(x)$$

Avec

$$\lim_{x\to 0^+}\epsilon(x) = 0 \ , \ f_1(x) = \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x} \ \text{ et } \ f_2(x) = -\frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{2}\Big(1+\epsilon(x)\Big).$$

L'on sait (à l'aide d'une intégration par parties) que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_1$ est convergente.

D'autre part,

$$f_2(x) \sim -\frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{2} \ \ (x \to 0^+)$$

avec $\displaystyle\int_0^1 \cos^2(\frac{1}{x})dx$ convergente car bornée.

On en déduit, par application de l'additivité et la linéarité des intégrales que

$$\int_0^1 \frac{\ln\Big(1 + x\cos(\frac{1}{x})\Big)}{x^2}dx \text{ est convergente.}$$

3.2 Critères spéciaux valables pour les fonctions de SIGNE CONSTANT

Sans perdre de généralité, on supposera que la fonction f est positive, au moins au voisinage de 0. Si la fonction f est négative, On étudiera plutôt l'intégrale de $-f$ qui est positive.

3.2.1 Intégrales de Référence α-Riemann au voisinage de 0^+

Ce sont des intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors

Proposition 55.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \ \textit{converge} \iff \alpha < 1.}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \ \textit{diverge} \iff \alpha \geq 1.}$$

démonstration 56. *Soit* $x \in]0,1]$.

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = -\ln(x) \text{ si } \alpha = 1 \text{ et } \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}) \text{ si } \alpha \neq 1.$$

Donc

$$\alpha = 1 \implies \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty \implies \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ diverge}$$

$$\alpha > 1 \implies \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty \implies \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ diverge}$$

$$\alpha < 1 \implies \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \implies \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge}$$

3.2.2 Critère de comparaison

Théorème 57. *Soient f et g deux applications localement intégrables et POSITIVES sur $]0,b]$. telles que*

$$(\forall t \in]0,b]) \quad 0 \leq f(t) \leq g(t) (g \text{ comme grande}$$

Alors

$$\int_0^b g \text{ converge} \implies \int_0^b f \text{ converge}$$

et par contraposition,

$$\int_0^b f \text{ diverge} \implies \int_0^b g \text{ diverge}$$

démonstration 58. *Encore une fois, utilisons le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Soient F et G les fonctions définies par*

$$(\forall x \in]0,b]) \;\; F(x) = \int_x^b f(t)dt \text{ et } G(x) = \int_x^b g(t)dt.$$

Par hypothèse,

$$(\forall t \in]0,b]) \;\; 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

$$\implies (\forall (x,y) \in]0,b]^2) \; \left(x < y \implies 0 \leq \int_x^y f(t)dt \leq \int_x^y g(t)dt\right)$$

donc

$$\int_0^b g \text{ converge} \implies (\exists \eta > 0)(\forall (x,y) \in]0,b]^2) \; \left(x < y < \eta \implies |\int_x^y g| < \epsilon\right)$$

$$\Longrightarrow (\exists \eta > 0)\ (\forall (x,y) \in]0,b]^2)\ \Big(x < y < \eta \quad \Longrightarrow \quad \int_x^y g < \epsilon\Big)\ \textit{car } g \textit{ est positive et } x < y$$

$$\Longrightarrow (\exists \eta > 0)\ (\forall (x,y) \in]0,b]^2)\ \Big(x < y < \eta \quad \Longrightarrow \quad \int_x^y f \leq \int_x^y g < \epsilon\Big)$$

$$\Longrightarrow \int_0^b f \ \textit{converge.}$$

remarque 59. *** Le critère de comparaison constitue la base du critère d'équivalence et de la règle en x^α*

*** Le critère de comparaison se démontre soit par le critère de Cauchy, soit par le théorème de la limite monotone.*

*** Le critère de comparaison n'est pas applicable à des fonctions de signe variable.*

3.2.3 Critère d'équivalence

C'est de loin, le critère le plus pratique et en même temps le plus rapide.

Proposition 60. *Soient f et g deux applications localement intégrables et Positives sur* $]0,b]$.

$$\boxed{f(x) \sim g(x)\ \ (x \to 0^+) \implies \int_0^b f \ \textit{ et } \int_0^b g \ \textit{ sont de même nature}}$$

démonstration 61.

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to 0^+) \implies f(x) = g(x)\Big(1 + \epsilon(x)\Big) \ \textit{avec} \ \lim_{x \to 0^+} \epsilon(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \textit{pour } x \textit{ proche de } 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \epsilon(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \textit{pour } x \textit{ proche de } 0, \quad \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$$

On n'a plus qu'à appliquer le critère de comparaison pour conclure.

remarque 62. *Si $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to 0^+)$ et que $g(x) \geq 0$, alors pour x proche de 0^+, $f(x) \geq 0$.*

Exemple 63. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ impropre en 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ est continue sur $]0,1]$ donc elle est localement intégrable sur $]0,1]$.

De plus, cette fonction est positive sur $]0,1]$. On peut alors utiliser les critères des fonctions de signe constant.

Or $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ converge donc
$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ converge aussi.
****

Chapitre 4

Intégrale sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

4.1 Critères généraux pour les fonctions de signe VARIABLE

4.1.1 Critère de Cauchy pour la convergence d'une intégrale sur $[a, +\infty[$.

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

En appliquant le critère de Cauchy pour la limite d'une fonction, à $F : x \mapsto \int_a^x f$, on obtient

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge } \iff \lim_{x \to +\infty} F(x) \in \mathbb{R}$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0) \ (\exists A > 0) \ : \ (\forall (x, y) \in [A, +\infty[^2) \ \left(x < y \implies |\int_x^y f| < \epsilon \right)$$

$$\iff \text{ pour } x \text{ et } y \text{ assez grands }, \ |F(x) - F(y)| \text{ est très proche de } 0.$$

Noter bien la différence avec la formulation de ce critère dans le cas de l'intervalle $]0, b]$!!

4.1.2 Critère de Convergence absolue d'une intégrale sur $[a, +\infty[$.

L'avantage de ce critère se situe dans le fait qu'il transforme l'étude de intégrale d'une fonction de signe variable à celui d'une fonction positive. On peut ainsi appliquer les critères correspondant.

Proposition 64.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f \ \textit{absolument convergente} \implies \int_a^{+\infty} f \ \textit{convergente}}$$

démonstration 65. *ON utilise le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ quelconque donné.*

$$\int_a^{+\infty} f \ \textit{Abosolument convergente} \implies \int_a^{+\infty} |f| \ \textit{convergente}$$

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > a) \;:\; (\forall (x,y) \in [A, +\infty[^2) \;\; \left(x < y \implies |\int_x^y |f|| < \epsilon \right)$$

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > a) \;:\; (\forall (x,y) \in [A, +\infty[^2) \;\; \left(x < y \implies \int_x^y |f| < \epsilon \right)$$

car $\int_x^y |f| \geq 0$.

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > a) \;:\; (\forall (x,y) \in [A, +\infty[^2) \;\; \left(x < y \implies |\int_x^y f| < \epsilon \right)$$

car, d'après les propriétés, des intégrales de Riemann, $| \int_x^y f| \leq \int_x^y |f| < \epsilon$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ est convergente.}$$

Exemple 66.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)dx}{x^2}$$

est Absolument convergente, donc convergente, car

$$(\forall x \geq 1) \left| \frac{\sin(x^2)dx}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\text{et que} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ est évidemment convergente.}$$

$***$ Autre démonstration basée sur le critère de comparaison $***$

Elle part du fait que $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$.

4.1.3 Critère de l'intégration par parties

Théorème 67. *Soient u et v deux applications de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ telles que*

$$\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Alors, les intégrales

$$\int_a^{+\infty} u'v \text{ et } \int_a^{+\infty} uv' \text{ ont la même nature.}$$

et si elles convergent,

$$\int_a^{+\infty} u'v = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} uv'.$$

démonstration 68. *Il suffit de se rappeler que*

$$(\forall x \in [a,+\infty[) \quad \int_a^x u'v = \Big[uv\Big]_a^x - \int_a^x uv'$$
$$= u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x uv'$$

donc

$$\int_a^{+\infty} uv' \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x uv' \in \mathbb{R}(=L_1)$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x u'v = L - u(a)v(a) - L_1$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_a^x u'v \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^x u'v \text{ converge.}$$

De même, on montre que

$$\int_a^{+\infty} u'v \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} uv' \text{ converge.}$$

Exemple 69. Etudions la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

Posons $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.
u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. avec
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\cos(x)}{x} = 0,$

Donc les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'v$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} uv' = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}$ sont de même nature, c'est à dire convergentes,
car la dernière est, bien sûr, Absolument convergente.

4.1.4 Utilisation du développement limité

Si aucun des critères vus précédemment ne permet de conclure quant à la nature d'une intégrale impropre,
il nous reste le développement limité. on développe $f(x)$ au voisinage de $+\infty$, sous la forme d'une somme de n fonctions

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + .. + f_n(x)$$

puis, on étudie séparément les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_1, \int_a^{+\infty} f_2,$ et ... $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_n.$

Si toutes les n intégrales sont Convergentes, on peut alors en déduire,par additivité, que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est aussi convergente. Mais si seules $n-1$ intégrales sont convergentes, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ sera bien sûr Divergente.

Exemple 70. Etudions la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(1-\frac{\sin(x)}{x})$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\ln(1-\frac{\sin(x)}{x}) = -\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sin^2(x)}{2x^2}\Big(1+\epsilon(x)\Big) = f_1(x) + f_2(x)$$

Avec

$$\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0,\quad f_1(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{\sin^2(x)}{2x^2}\Big(1+\epsilon(x)\Big).$$

L'on sait (à l'aide d'une intégration par parties, ou de la règle d'Abel) que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_1$ est convergente. D'autre part,

$$f_2(x) \sim \frac{\sin^2(x)}{2x^2} \quad (x \to +\infty)$$

et

$$0 \leq \frac{\sin^2(x)}{2x^2} \leq \frac{1}{2x^2} \text{ avec } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2} \text{ convergente}$$

On en déduit que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \ln(1-\frac{\sin(x)}{x}) \text{ est convergente.}$$

comme somme de deux intégrales convergentes.

4.1.5 Règle d'Abel

Soit a un réel et f une application continue sur $[a,+\infty[$ telle que sa primitive F Définie sur $[a,+\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f$ soit bornée sur $[a,+\infty[$ c'est à dire que

$$(\exists M > 0) \quad : \quad (\forall x \in [a,+\infty[) \quad \Big|\int_a^x f(t)dt\Big| \leq M$$

Si g est une application de classe C^1 décroissante sur $[a,+\infty[$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$,

Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exemple 71.

$$f : x \mapsto \sin(x) \text{ et } g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

f est continue sur $[0,+\infty[$.

$$(\forall x \in [0,+\infty[) \quad \Big|\int_0^x \sin(t)dt\Big| = |\cos(x)-1| \leq |\cos(x)|+1 \leq 2(M=2).$$

$(\forall x \in [0,+\infty[) \quad g'(x) = \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.

g est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

g est décroissante sur $[0,+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Donc les hypothèses sont satisfaites sur $[0,+\infty[$, et par conséquent,
l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{x+1}}$ est Convergente.

démonstration 72. *Faisons appel au critère de Cauchy et montrons que*

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists A > a) \ : \ (\forall y > x \geq A) \ \left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| < \epsilon$$

D'une part, pour tout $(x,y) \in [a,+\infty[^2$, nous avons

$$\int_x^y fg = \int_x^y F'g = \Big[Fg\Big]_x^y - \int_x^y Fg'$$
$$= F(y)g(y) - F(x)g(x) - \int_x^y Fg'$$

Or, d'après la Deuxième formule de la moyenne (V Le polycope sur l'intégrale de Riemann)

$$(\exists c \in [x,y]) \ : \ \int_x^y Fg' = F(c)\int_x^y g' = F(c)\Big[g\Big]_x^y = F(c)(g(y)-g(x))$$

donc

$$\int_x^y fg = F(y)g(y) - F(x)g(x) - F(c)(g(y)-g(x))$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\int_x^y fg\right| \leq 4Mg(x) \text{ car } F \text{ est majorée et } g \text{ positive décroissante}$$

Prenons maintenant un $\epsilon > 0$ quelconque.
Par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > 0) \ : \ (\forall x > A) \ |g(x)| < \frac{\epsilon}{4M}$$

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > a) \ : \ (\forall x > A) \ |g(x)| < \frac{\epsilon}{4M}$$

$$\Longrightarrow \quad (\exists A > a) \ : \ (\forall y > x > A) \ \left|\int_x^y fg\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} fg \text{ est convergente.}$$

remarque 73. *Nous avons supposé que $A > a$ car si la proposition est vraie pour un certain $A > 0$, elle sera encore vraie pour $B > A$. On peut donc supposer que A est toujours $> a$.*

4.2 Critères spéciaux valables pour les fonctions de SIGNE CONSTANT

Sans perdre de généralité, on supposera que la fonction f est positive au moins au voisinage de $+\infty$, c'est à dire sur un intervalle du type $[c, \infty[$ avec $c > a$.

Si la fonction f est négative, On étudiera plutôt l'intégrale de $-f$ qui est positive.

4.2.1 Intégrales de référence α-Riemann au voisinage de $+\infty$

Ce sont des intégrales du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

On a le résultat suivant :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ diverge} \iff \alpha \leq 1.}$$

démonstration 74. *Profitons de la formule du changement de variable, et posons* $x = \frac{1}{t}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *aura exactement la même nature que l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{-dt}{t^{-\alpha} t^2}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 \frac{-dt}{t^{-\alpha+2}}$$

qui converge si et seulement si $-\alpha + 2 < 1$ *ou* $\alpha > 1$.

4.2.2 Critère de comparaison

Théorème 75. *Soit* $a > 0$ *et Soient* f *et* g *deux applications localement intégrables sur* $[a, +\infty[$. *telles que*

$$(\forall t \in [a, +\infty[) \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Alors

$$\int_a^{+\infty} g \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

et par contraposée

$$\int_a^{+\infty} f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ diverge}$$

démonstration 76. *Encore une fois, utilisons le critère de Cauchy. Soit* $\epsilon > 0$ *arbitraire.*
Soient F *et* G *les fonctions définies par*

$$(\forall x \in [a,+\infty[)\ \ F(x) = \int_a^x f(t)dt \ \text{ et }\ G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Par hypothèse,

$$(\forall t \in [a,+\infty[)\ \ 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

$$\Longrightarrow\ (\forall y > x > a)\ \ 0 \leq \int_x^y f(t)dt \leq \int_x^y g(t)dt$$

donc

$$\int_a^{+\infty} g \text{ converge } \Longrightarrow (\exists A > a)\ (\forall y > x > A)\ \ |\int_x^y g| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow (\exists A > a)\ (\forall y > x > A)\ \ \int_x^y g < \epsilon \text{ car } g \text{ est positive.}$$

$$\Longrightarrow (\exists A > a)\ (\forall y > x > A)\ \ \int_x^y f \leq \int_x^y g < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

remarque 77. *** Le critère de comparaison peut être démontré en utilisant le théorème de la limite monotone.*
*** Le critère de comparaison constitue la base du critère d'équivalence et de la règle en* x^α
*** Le critère de comparaison n'est pas applicable à des fonctions de signe variable.*

4.2.3 Critère d'équivalence

il s'énonce ainsi
Soient f et g deux applications localement intégrables et positives sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

$$\boxed{f(x) \sim g(x)\ (x \to +\infty)\ \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ et } \int_a^{+\infty} g \text{ sont de même nature}}$$

démonstration 78.

$$f(x) \sim g(x)\ (x \to +\infty)\ \Longrightarrow\ f(x) = g(x)\Big(1 + \epsilon(x)\Big) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$$

$$\Longrightarrow\ \text{ pour } x \text{ assez grand },\ -\frac{1}{2} \leq \epsilon(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \text{ pour } x \text{ assez grand },\ \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$$

On applique alors le critère de comparaison.

Exemple 79. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ impropre à cause de la borne infinie.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ est continue, donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus, cette fonction est positive sur $[1, +\infty[$.

On peut alors utiliser les critères des fonctions de signe constant.

Or $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x \to +\infty)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$ converge car $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ et $\frac{3}{2} > 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ converge aussi.

4.2.4 Règle en x^α

Ce critère est une conséquence directe du critère de comparaison et de la propriété prénommée "<u>Retour de la Limite</u>"

qui offre des propriétés sur $f(x)$ connaissant $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Par exemple, et de façon générale, on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0 \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad -1 < f(x) < 1.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad -2 < f(x) < 2.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -3 \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad -5 < f(x) < -1.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad f(x) > 1.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad f(x) > 77.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \implies \text{ pour } x \text{ assez proche de } x_0 \quad f(x) > 5.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 7 \implies \text{ pour } x \text{ assez petit } \quad 3 < f(x) < 11.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 6 \implies \text{ pour } x \text{ assez grand } \quad 5 < f(x) < 7...$$

La règle en x^α est sûrtout utilisée lorsque l'intégrale à étudier est impropre à cause d'une borne INFINIE ($x_0 = +\infty$) Car il profite du fait qu'au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui elle même,

l'emporte sur le logarithme.

Les tableaux suivants résument toutes les situations qui permettent de conclure à coup sûr.

Soit f une application localement intégrable sur $[a, +\infty[$ et positive.

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)$	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
0	? ? ?	? ? ?	Convergente
$L \in \mathbb{R}^{*+}$	Divergente	? ? ?	Convergente
$+\infty$	Divergente	Divergente	? ? ?

——————— A comparer avec ———————

$\lim_{x\to0^+} x^\alpha f(x)$	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
0	Convergente	? ? ?	? ? ?
$L \in \mathbb{R}^{*+}$	Convergente	? ? ?	Divergente
$+\infty$	? ? ?	Divergente	Divergente

remarque 80. *Les points d'interrogation, signifient que, dans ces cas, on ne peut pas conclure de façon sûre* !.

Exemple 81. Etude de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$.

Posons $f(x) = x^4 e^{-x}$.
f est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$.
De plus f est positive sur $[0, +\infty[$.
D'autre part, on

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$$

Car, l'exponentielle l'emporte sur la puissance au voisinage de $+\infty$.
Il s'en suit que pour x assez grand, $0 \le x^2 f(x) < 1$ par exemple.
Donc, pour x assez grand, $0 \le f(x) < \frac{1}{x^2}$
On conclue grace au critère de comparaison :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ converge } \implies \int_1^{+\infty} f \text{ converge}$$

$$\implies \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx \text{ est convergente}$$

Exemple 82. Les intégrales de Bertrand : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta (ln(x))^\gamma}$. A comparer avec les séries de Bertrand :$\displaystyle\sum \frac{1}{n^\beta (ln(n))^\gamma}$.

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta (ln(x))^\gamma}$ pour $x \ge e$.
f est continue, donc localement intégrable, et positive sur $[e, +\infty[$.
On a le droit d'appliquer la règle en x^α.

<u>1^{er} cas : $\beta > 1$.</u>

Soit $\alpha \in]1, \beta]$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-\beta}}{\ln^\gamma(x)} = 0$$

$$\Longrightarrow \int_e^{+\infty} f(x)dx \text{ est convergente}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas : $\beta < 1$.</u>

Soit $\alpha \in [\beta, 1[$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-\beta}}{\ln^\beta(x)} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \int_e^{+\infty} f(x)dx \text{ est divergente}$$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas : $\beta = 1$.</u>

Le changement de variable $x = e^t$ transforme l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} f(x)dx$, en $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ qui converge si et seulement si $\gamma > 1$.

4.3 ALGORITHME pour étudier la nature d'une intégrale généralisée ?

Un algorithme, c'est une méthode à suivre PAS à PAS.

Quitte à effectuer le changement de variable adéquat, l'on peut toujours transformer l'étude de la nature d'une intégrale sur des intervalles du type $[a, b[,]a, b],]a, b[$ où a et b sont finis ou infinis, au cas d'une intégrale sur $]0, b]$ impropre à droite de 0 ou sur $[a, +\infty[$ impropre à cause de la borne $+\infty$. a et b étant bien sûr finis.

Pour ne pas mélanger et compliquer les choses, distinguons séparément les deux cas.

4.3.1 Intégrale impropre à droite de 0

Soit f une fonction localement intégrable sur $]0, b]$ où b est un réel > 0.

Si l'on peut calculer $F(x) = \displaystyle\int_x^b f$ pour $x \in]0, b]$, alors il suffit de voir si $\displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x)$ existe ou non.

Si cette limite existe dans $\mathbb{R}$, l'intégrale sera convergente et $\displaystyle\int_0^b f = \lim_{x\to0^+} F(x)$. Dans le cas contraire, c'est à dire si $\displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x)$ est infinie ou n'existe pas, l'intégrale est par conséquent divergente.

Dans le cas où il est difficile d'obtenir l'expression explicite de $F(x)$, On commence par voir si $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe. Si oui, l'intégrale $\int_0^b f$ converge. Sinon

On regarde si f est bornée sur $]0, b]$. Si oui, l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f$ converge. Sinon, On s'intéresse au signe de f au voisinage de 0^+.

Si le signe de f est constant au voisinage de 0, on peut appliquer les critères de comparaison ou d'équivalence ou la règle en x^α.

Si le signe n'est pas constant, on commence par étudier la convergence absolue .

Si l'intégrale est absolument convergente, alors elle converge.

Si elle n'est pas absolument convergente,ou si l'on ne peut pas le savoir, On essaie le critère de l'intégration par parties ou en dernier recours le critère du développement limité.

4.3.2 Intégrale impropre à cause de la borne infinie

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$ où a est un réel .

Si l'on peut calculer $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ pour $x \in [a, +\infty[$, alors il suffit de voir si $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe ou non.

Si cette limite existe dans $\mathbb{R}$, l'intégrale sera convergente et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} F(x)$. Dans le cas contraire, c'est à dire si $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ est infinie ou n'existe pas, l'intégrale sera par conséquent divergente.

Dans le cas où il est difficile d'obtenir l'expression explicite de $F(x)$,

On commence par calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Si cette limite est un réel non nul, ou est infinie, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Si cette limite est nulle ou n'existe pas, on regarde si le signe de f est constant au voisinage de $+\infty$. Si oui, on peut alors appliquer les critères de comparaison ou d'équivalence ou la règle en x^α.

Si le signe n'est pas constant, on commence par étudier la convergence absolue .

Si l'intégrale est absolument convergente, alors elle converge.

Si elle n'est pas absolument convergente, ou si on n'en sait rien, On essaie le critère de l'intégration par parties ou la règle d'Abel , ou en dernier recours le critère du développement limité.

Chapitre 5

EXAMENS ANTERIEURS

5.1 Ordinaire 16-17

Exercice 1. : Soit f l'application définie sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2+2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1) Représenter grossièrement la courbe de f.

2) En utilisant le critère de Cauchy, montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2. : 1) A l'aide d'une intégration par parties , calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

2) En déduire l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

Exercice 3. : Etudier la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée suivante :

$$K = \int_0^{+\infty} \Big(1-\cos(\frac{1}{x})\Big)dx$$

Exercice 4. : Soit E l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{x+1}y = 1$$

1) Donner la solution générale de l'équation E sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

2) Préciser la solution qui satisfait la condition $y(0)=2$.

<u>*Exercice*</u> 5. : Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\exists T \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2T)=f(x)$$

(f est périodique de période $2T$). On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad g(a)=\int_{a-T}^{a+T} f(x)dx.$$

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad g(a)=\int_0^{2T} f(x)dx$

5.2 Rattrapage 2016-2017

<u>*Exercice*</u> 6. :

Soit f l'application définie sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 2 & \text{si } x=0 \text{ ou } x=1. \end{cases}$$

1) Représenter la courbe de f.

2) En utilisant le critère de Cauchy, montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.

<u>*Exercice*</u> 7. :

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}\, dx.$$

1) Effectuer le changement de variable $t=\pi-x$ sur I.

2) En déduire la valeur de I.

<u>*Exercice*</u> 8. :

Déterminer les primitives de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2},$$

en précisant leurs intervalles de validité.

Exercice 9. :

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\quad J = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

$$2)\quad K = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$$

Exercice 10. :

Soit E l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{2}{x+1} y = 1$$

1) Donner la solution générale de l'équation E sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2) Préciser la solution qui satisfait la condition $y(0) = 2$.

5.3 Ordinaire 17-18

Exercice 11. :
1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une application bornée définie de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.
Donner la définition de l'intégrabilité de f sur $[a, b]$,
a) Au sens de Darboux.
b) Au sens de Riemann.
2) En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{4n^2 - k^2}$$

Exercice 12. :
On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3 dx.$$

1) Montrer que $I = J$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I.
3) A l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$, calculer J.

Exercice 13. :
Soit K l'intégrale impropre définie par

$$K = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

1) En utilisant la règle en x^α, Montrer que K est convergente.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^t xe^{-x}dx$, pour $t > 0$.
3) En déduire la valeur de K.

Exercice 14. :
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad : \quad y' = \frac{2}{x}y + \sqrt{x}$$

On se propose de chercher des solutions de (E), sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
1) Résoudre l'équation incomplète associée à (E).
2) Donner une solution particulière de l'équation (E).
3) En déduire la solution générale de l'équation complète (E).

Fin.

5.4 Corrigé de l'ordinaire 2017-2018

Exercice 15. :
a) f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Darboux

$$\Longleftrightarrow \; sup\{L(f, \sigma), \sigma \in S\} = inf\{U(f, \sigma), \sigma \in S\}$$

b) f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann

$$\Longleftrightarrow \; (\exists I \in \mathbb{R}) \; : \; (\forall \epsilon > 0) \; (\exists p > 0) : \; (\forall \sigma = (x_i)_{i=0,n-1} \in S)$$

$$|\sigma| < p \implies \forall (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n) \in X_{i=0}^{n-1}[x_i, x_{i+1}] \quad |R(f, \sigma, (\xi_i)_{i=0,1,\dots,n-1}) - I| < \epsilon.$$

Avec

$$R(f, \sigma, (\xi_i)_{i=0,1,\dots,n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

2) Pour $n > 0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{4n^2 - k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4 - (\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

avec $f : x \mapsto \frac{1}{4-x^2}$.

f est continue sur $[0,1]$ dons elle est intégrable sur $[0,1]$. Lorsque le pas tend vers 0, les sommes de Riemann de f tendent vers $\displaystyle\int_0^1 f$.

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{4}\Big[\ln(|\frac{2+x}{2-x}|)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\ln(3).$$

<u>*Exercice*</u> 16. :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3 dx.$$

1) Posons $t = \frac{\pi}{2} - x$ avec $dt = -dx$. I devient alors

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\frac{\pi}{2}-t))^3(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^3 dt = J.$$

2) Posons $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = (\sin(x))^2$. Donc $u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx = \Big[-\cos(x)(\sin(x))^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2\sin(x)dx$$

$$= 2\Big[-\frac{1}{3}(\cos(x))^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

3) Posons $t = \sin(x)$ avec $dt = \cos(x)dx$.

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(\sin(x))^2)\cos(x)dx = \int_0^1 (1-t^2)dt = \Big[t - \frac{t^2}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

<u>*Exercice*</u> 17. :

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geq 0 \;\; f(x) = xe^{-x}$.
f est continue sur $[0,+\infty[$, donc elle est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.
f est positive sur $[0,+\infty[$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0$.
Donc, d'après la règle en x^α, l'intégrale K est convergente.

2) Soit $t > 0$.

$$\int_0^t xe^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

3) On a

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(-te^{-t} - e^{-t} + 1\Big) = 1$$

Donc

$$\boxed{K = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1}$$

<u>*Exercice*</u> 18. :

1) L'équation incomplète s'écrit

$$y' = \frac{2}{x}y$$

ou bien

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

qui s'intègre en

$$\ln(\frac{y}{\lambda}) = 2\ln(|x|) = \ln(x^2)$$

d'où

$$\boxed{y_I = \lambda x^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Posons $y_p = \lambda(x)x^2$. y_p est solution de (E) si

$$\lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x) = 2x\lambda(x) + \sqrt{x}$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$$

d'où

$$\lambda(x) = -2x^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\boxed{y_p = -2x^{\frac{3}{2}}.}$$

3)

$$y_g = y_I + y_p = \lambda(x)x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fin.

Tous les êtres vivants sont mortels $\Longrightarrow$ Tous les êtres vivants sont moins qu'imparfaits.